

Βελτιώσεις – Προσθήκες

Σε αυτό το αρχείο θα παρουσιάζονται συνεχείς βελτιώσεις, προσθήκες και νέες λύσεις ή παρατηρήσεις , που αφορούν στο περιεχόμενο του βιβλίου.

Ενδεχομένως να προσθέσουμε παραδείγματα, εφαρμογές και άλλο σχετικό υλικό, για τη μελέτη της Συνδυαστικής.

Τις παρατηρήσεις ή τις λύσεις σας , παρακαλώ να μου τις στέλνετε με μήνυμα σε word για να τις αξιοποιώ άμεσα σε κάθε ευκαιρία.

Μπορείτε να επικοινωνείτε μαζί μου :

- Στο τηλέφωνο : 6979382042
- Στο mail : charalamposstergiou@gmail.com

Ο κόσμος κάνει άλματα στη γνώση και την τεχνολογία.
Δεν θα προλάβω την ΑΙ στην εκπαίδευση, αισθάνομαι όμως ότι μετά από 10 χρόνια όλα θα
είναι διαφορετικά.
Ας δούμε τη συζήτηση που είχα με το ChatGPT για την άσκηση 5.20

Άσκηση 5.20 — Κατανομή 20 διαφορετικών βιβλίων σε 7 μαθητές

Εκφώνηση. Με πόσους τρόπους μπορούμε να δώσουμε 20 διαφορετικά βιβλία σε 7 μαθητές, έτσι ώστε 4 μαθητές να πάρουν από 2 βιβλία και οι άλλοι 3 να μοιραστούν εξίσου τα υπόλοιπα βιβλία;

Σκέψη και λεπτομερής λύση

1. Κατανόηση του προβλήματος.

- Έχουμε 20 διαφορετικά βιβλία.
- Θέλουμε τέσσερις (4) μαθητές να πάρουν από 2 βιβλία ο καθένας → συνολικά $4 \cdot 2 = 8$ βιβλία.
- Οι υπόλοιποι τρεις (3) μαθητές θα πάρουν εξίσου τα υπόλοιπα βιβλία. Τα υπόλοιπα βιβλία είναι $20 - 8 = 12$, άρα ο καθένας από αυτούς θα πάρει $12/3 = 4$ βιβλία.
- Συνεπώς η τελική κατανομή μεγέθους ανά μαθητή είναι: 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4.

2. Βήμα 1 — Επιλογή των μαθητών που θα πάρουν 2 βιβλία.

- Από τους 7 μαθητές επιλέγουμε ποιους 4 θα είναι αυτοί που θα πάρουν από 2 βιβλία.
- Αριθμός τρόπων: $\binom{7}{4}$.

3. Βήμα 2 — Διάταξη/κατανομή των 20 διαφ↓τικών βιβλίων σε ονοματισμένους μαθητές με αυτά τα μεγέθη.

- Αφού οι μαθητές είναι διακεκριμένοι (ονοματισμένοι), και τα βιβλία είναι διαφορετικά, ο αριθμός τρόπων να χωρίσουμε τα 20 διαφορετικά αντικείμενα σε 7 διακεκριμένους κάδους με αντίστοιχα μεγέθη 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4 είναι ο πολυωνυμικός συντελεστής:

$$\frac{20!}{2! 2! 2! 2! 4! 4! 4!} = \frac{20!}{2!^4 4!^3}.$$

- Εξήγηση: Αυτό προκύπτει από την παράγωγη της γενικής φόρμουλας για την κατανομή n διακεκριμένων αντικειμένων σε ορισμένα μπλοκ με συγκεκριμένα μεγέθη — πρώτα διατάσσουμε τα 20! και διαιρούμε με τα εσωτερικά μεγέθη των μπλοκ (πολλαπλασιαστικά) για να διορθώσουμε την εσωτερική διάταξη μέσα σε κάθε μπλοκ που δεν ενδιαφέρει εδώ.

4. Τελικός αριθμός τρόπων. Συνδυάζοντας τα δύο βήματα:

$$\binom{7}{4} \cdot \frac{20!}{2!^4 4!^3}.$$

5. Μικρή αριθμητική απλοποίηση (προαιρετικά).

- $\binom{7}{4} = 35$, οπότε μπορούμε να γράψουμε και

$$35 \cdot \frac{20!}{2!^4 4!^3}.$$

Ευχαριστω ! Εγώ θα έλεγα : Χωρίζω τα 20 παιδιά στις μη διατεταγμένες ομάδες 2-2-2-2-4-4-4 και αυτές τις δίνω στα 7 παιδιά με $(20!/(2!2!2!2!4!4!4!3!)) \cdot 7!$ τρόπους. Πρώτα τις κάνω μη διατεταγμένες, μια και έχω ισοπληθείς ομάδες και μετά τις μεταθέτω. Τι λες ;

Α, τώρα καταλαβαίνω ακριβώς τι λες — κάνεις μια πιο «συμμετρική» προσέγγιση, αλλά ας τη δούμε προσεκτικά.

Λέμε:

1. Θέλουμε να χωρίσουμε τα 20 βιβλία σε 7 ομάδες με μεγέθη (2, 2, 2, 2, 4, 4, 4).

- Οι 4 μικρές ομάδες είναι ίδιες (2 βιβλία)
- Οι 3 μεγάλες ομάδες είναι ίδιες (4 βιβλία)

Όταν λέμε «μη διατεταγμένες ομάδες», αυτό σημαίνει ότι για τις ίδιες μεγέθους ομάδες πρέπει να διαιρέσουμε με τα αντίστοιχα παραγοντικά για να μην μετράμε διπλο.

Άρα για μη διατεταγμένες ομάδες:

$$\frac{20!}{(2!)^4 (4!)^3 \cdot 4! \cdot 3!}$$

- Το $(2!)^4$ είναι για εσωτερική διάταξη των 2-βιβλίων ομάδων
- Το $(4!)^3$ για εσωτερική διάταξη των 4-βιβλίων ομάδων
- Το $4!$ για να μην μετράμε διαφορετική διάταξη των τεσσάρων ομάδων των 2 βιβλίων (ισομεγέθεις)
- Το $3!$ για τις τρεις ομάδες των 4 βιβλίων

Στη συνέχεια, τις δίνουμε στους 7 μαθητές.

- Όλοι οι μαθητές είναι διαφορετικοί, άρα μπορούμε να τις μεταθέσουμε στους μαθητές: $7!$ τρόποι

Άρα η συνολική μέθοδος σου δίνει:

$$\frac{20!}{(2!)^4(4!)^3 \cdot 4! \cdot 3!} \cdot 7!$$

Τώρα, ας δούμε αν συμφωνεί με την προηγούμενη προσέγγιση ($\binom{7}{4} \cdot \frac{20!}{(2!)^4(4!)^3}$):

- Υπολογίζουμε το κλάσμα με τα επιπλέον $4! \cdot 3!$ και $7!$:

$$\frac{20!}{(2!)^4(4!)^3 \cdot 4! \cdot 3!} \cdot 7! = \frac{20!}{(2!)^4(4!)^3} \cdot \frac{7!}{4!3!} = \frac{20!}{(2!)^4(4!)^3} \cdot \binom{7}{4}.$$

Ακριβώς το ίδιο που είχαμε πριν! ✓

Άρα η μέθοδος σου είναι απολύτως σωστή, απλά είναι ένα διαφορετικό «οπτικό» μονοπάτι για να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

ΤΕΛΟΣ ΣΕΛΙΔΑΣ 1