

Βελτιώσεις – Προσθήκες

Σε αυτό το αρχείο θα παρουσιάζονται συνεχείς βελτιώσεις, προσθήκες και νέες λύσεις ή παρατηρήσεις , που αφορούν στο περιεχόμενο του βιβλίου:

Μπάμπης Στεργίου:

Στοχαστικά Μαθηματικά - Α. ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Ενδεχομένως να προσθέσουμε παραδείγματα, εφαρμογές και άλλο σχετικό υλικό, για τη μελέτη της Συνδυαστικής.

Τις παρατηρήσεις ή τις λύσεις σας , παρακαλώ να μου τις στέλνετε με μήνυμα σε word για να τις αξιοποιώ άμεσα σε κάθε ευκαιρία.

Μπορείτε να επικοινωνείτε μαζί μου :

- **Στο τηλέφωνο** : 6979382042
- **Στο mail** : charalamposstergiou@gmail.com

Προσθήκη 1 – Σελ(2-4)**6-11-2025**

Ο κόσμος κάνει άλματα στη γνώση και την τεχνολογία.

Δεν θα προλάβω την ΑΙ στην εκπαίδευση, αισθάνομαι όμως ότι μετά από 10 χρόνια όλα θα είναι διαφορετικά.

Ας δούμε τη συζήτηση που είχα με το ChatGPT για την άσκηση 5.20

Άσκηση 5.20 — Κατανομή 20 διαφορετικών βιβλίων σε 7 μαθητές

Εκφώνηση. Με πόσους τρόπους μπορούμε να δώσουμε 20 διαφορετικά βιβλία σε 7 μαθητές, έτσι ώστε 4 μαθητές να πάρουν από 2 βιβλία και οι άλλοι 3 να μοιραστούν εξίσου τα υπόλοιπα βιβλία;

Σκέψη και λεπτομερής λύση

1. Κατανόηση του προβλήματος.

- Έχουμε 20 διαφορετικά βιβλία.
- Θέλουμε τέσσερις (4) μαθητές να πάρουν από 2 βιβλία ο καθένας → συνολικά $4 \cdot 2 = 8$ βιβλία.
- Οι υπόλοιποι τρεις (3) μαθητές θα πάρουν εξίσου τα υπόλοιπα βιβλία. Τα υπόλοιπα βιβλία είναι $20 - 8 = 12$, άρα ο καθένας από αυτούς θα πάρει $12/3 = 4$ βιβλία.
- Συνεπώς η τελική κατανομή μεγέθους ανά μαθητή είναι: 2, 2, 2, 4, 4, 4.

2. Βήμα 1 — Επιλογή των μαθητών που θα πάρουν 2 βιβλία.

- Από τους 7 μαθητές επιλέγουμε ποιους 4 θα είναι αυτοί που θα πάρουν από 2 βιβλία.
- Αριθμός τρόπων: $\binom{7}{4}$.

3. Βήμα 2 — Διάταξη/κατανομή των 20 διαφ↓τικών βιβλίων σε ονοματισμένους μαθητές με αυτά τα μεγέθη.

- Αφού οι μαθητές είναι διακεκριμένοι (ονοματισμένοι), και τα βιβλία είναι διαφορετικά, ο αριθμός τρόπων να χωρίσουμε τα 20 διαφορετικά αντικείμενα σε 7 διακεκριμένους κάδους με αντίστοιχα μεγέθη 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4 είναι ο πολυωνυμικός συντελεστής:

$$\frac{20!}{2! 2! 2! 2! 4! 4! 4!} = \frac{20!}{2!^4 4!^3}.$$

- Εξήγηση: Αυτό προκύπτει από την παράγωγη της γενικής φόρμουλας για την κατανομή n διακεκριμένων αντικειμένων σε ορισμένα μπλοκ με συγκεκριμένα μεγέθη — πρώτα διατάσσουμε τα 20! και διαιρούμε με τα εσωτερικά μεγέθη των μπλοκ (πολλαπλασιαστικά) για να διορθώσουμε την εσωτερική διάταξη μέσα σε κάθε μπλοκ που δεν ενδιαφέρει εδώ.
4. Τελικός αριθμός τρόπων. Συνδυάζοντας τα δύο βήματα:

$$\binom{7}{4} \cdot \frac{20!}{2!^4 4!^3}.$$

5. Μικρή αριθμητική απλοποίηση (προαιρετικά).

- $\binom{7}{4} = 35$, οπότε μπορούμε να γράψουμε και

$$35 \cdot \frac{20!}{2!^4 4!^3}.$$

Ευχαριστω ! Εγώ θα έλεγα : Χωρίζω τα 20 παιδιά στις μη διατεταγμένες ομάδες 2-2-2-2-4-4-4 και αυτές τις δίνω στα 7 παιδιά με $(20!/(2!2!2!2!4!4!4!3!)) \cdot 7!$ τρόπους. Πρώτα τις κάνω μη διατεταγμένες, μια και έχω ισοπληθείς ομάδες και μετά τις μεταθέτω. Τι λες ;

Α, τώρα καταλαβαίνω ακριβώς τι λες — κάνεις μια πιο «συμμετρική» προσέγγιση, αλλά ας τη δούμε προσεκτικά.

Λέμε:

1. Θέλουμε να χωρίσουμε τα 20 βιβλία σε 7 ομάδες με μεγέθη (2, 2, 2, 2, 4, 4, 4).

- Οι 4 μικρές ομάδες είναι ίδιες (2 βιβλία)
- Οι 3 μεγάλες ομάδες είναι ίδιες (4 βιβλία)

Όταν λέμε «μη διατεταγμένες ομάδες», αυτό σημαίνει ότι για τις ίδιες μεγέθους ομάδες πρέπει να διαιρέσουμε με τα αντίστοιχα παραγοντικά για να μην μετράμε διπλο.

Άρα για μη διατεταγμένες ομάδες:

$$\frac{20!}{(2!)^4 (4!)^3 \cdot 4! \cdot 3!}$$

- Το $(2!)^4$ είναι για εσωτερική διάταξη των 2-βιβλίων ομάδων
- Το $(4!)^3$ για εσωτερική διάταξη των 4-βιβλίων ομάδων
- Το 4! για να μην μετράμε διαφορετική διάταξη των τεσσάρων ομάδων των 2 βιβλίων (ισομεγέθεις)
- Το 3! για τις τρεις ομάδες των 4 βιβλίων

Στη συνέχεια, τις δίνουμε στους 7 μαθητές.

- Όλοι οι μαθητές είναι διαφορετικοί, άρα μπορούμε να τις μεταθέσουμε στους μαθητές: $7!$ τρόποι

Άρα η συνολική μέθοδος σου δίνει:

$$\frac{20!}{(2!)^4(4!)^3 \cdot 4! \cdot 3!} \cdot 7!$$

Τώρα, ας δούμε αν συμφωνεί με την προηγούμενη προσέγγιση ($\binom{7}{4} \cdot \frac{20!}{(2!)^4(4!)^3}$):

- Υπολογίζουμε το κλάσμα με τα επιπλέον $4! \cdot 3!$ και $7!$:

$$\frac{20!}{(2!)^4(4!)^3 \cdot 4! \cdot 3!} \cdot 7! = \frac{20!}{(2!)^4(4!)^3} \cdot \frac{7!}{4!3!} = \frac{20!}{(2!)^4(4!)^3} \cdot \binom{7}{4}.$$

Ακριβώς το ίδιο που είχαμε πριν! ✓

Άρα η μέθοδος σου είναι απολύτως σωστή, απλά είναι ένα διαφορετικό «οπτικό» μονοπάτι για να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 1

Προσθήκη 2 - Σελίδες (5-13)

20-11-2025

Μια σημαντική προσθήκη για τη νέα έκδοση.

Εφαρμογές των συνδυασμών - Χωρισμός σε ομάδες

Θεωρούμε ένα σύνολο με n στοιχεία και ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να το χωρίσουμε σε δύο ομάδες (υποσύνολα) που η μία να περιέχει k στοιχεία. Η άλλη ομάδα θα έχει αναγκαστικά $n - k$ στοιχεία.

Θα βρούμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, με την σημείωση ότι οι ομάδες αυτές είναι διατεταγμένες με τη φυσική έννοια, βαλμένες δηλαδή σε μια σειρά με κριτήριο το πλήθος των στοιχείων που έχει η καθεμία. Αυτό σημαίνει ότι η πρώτη ομάδα θα έχει k στοιχεία.

Επιλέγουμε από τα n στοιχεία τα k και δημιουργούμε τη μία ομάδα. Αυτό γίνεται με $\binom{n}{k}$ τρόπους.

Με τα υπόλοιπα $n - k$ στοιχεία δημιουργούμε με μοναδικό τρόπο την άλλη ομάδα. Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, δημιουργούμε τις δύο ομάδες με :

$$\binom{n}{k} \cdot 1 = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ τρόπους.}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν τα $n = k + m$ στοιχεία ενός συνόλου τα χωρίσουμε σε δύο ομάδες, από τις οποίες η μία περιέχει k και η άλλη m στοιχεία, τότε αυτό μπορεί να γίνει με

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{m} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{m!(n-k-m)!} = \frac{n!}{k!m!},$$

αφού $n = k + m$ και έτσι $(n - k - m)! = 0! = 1$

Καταλήγουμε λοιπόν στο πρώτο μας βασικό συμπέρασμα :

Πρόταση

Αν τα $n = k + m$ στοιχεία ενός συνόλου θέλουμε να τα χωρίσουμε σε δύο διατεταγμένες ομάδες, από τις οποίες η μία περιέχει k και η άλλη m στοιχεία, με $k \neq m$, τότε αυτό μπορεί να γίνει με

$$N(n+k | n, k) = \frac{n!}{k!m!} \text{ διαφορετικούς τρόπους,}$$

Γιατί όμως θέσαμε τον περιορισμό $k \neq m$; Τι θα συμβεί αν $k = m$; Αυτό είναι από τα πιο κρίσιμα σημεία που πρέπει να προσέχουμε στον χωρισμό σε ομάδες. Ας το δούμε με ένα παράδειγμα.

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και ας το χωρίσουμε σε δύο ομάδες με 2 στοιχεία η καθεμία.

Σύμφωνα με τον τύπο θα πάρουμε:

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6 \text{ τρόπους.}$$

Στην πραγματικότητα οι διαφορετικοί τρόποι χωρισμού σε δύο τέτοιες ομάδες είναι οι εξής :

1 ^{ος} χωρισμός	{α,β}	{γ,δ}
2 ^{ος} χωρισμός	{α,γ}	{β,δ}
3 ^{ος} χωρισμός	{β,γ}	{α,δ}

Γιατί όμως βρίσκουμε 3 τρόπους και όχι 6 που έδωσε ο τύπος ; Ας δούμε πιο προσεκτικά τους τρόπους σχηματισμού των ομάδων, κοιτάζοντας τον πίνακα.

1 ^{ος} χωρισμός	{α,β}	{γ,δ}
2 ^{ος} χωρισμός	{γ,δ}	{α,β}
3 ^{ος} χωρισμός	{α,γ}	{β,δ}
4 ^{ος} χωρισμός	{β,δ}	{α,γ}
5 ^{ος} χωρισμός	{β,γ}	{α,δ}
6 ^{ος} χωρισμός	{α,δ}	{β,γ}

Την απάντηση την βλέπουμε στον πίνακα: Όταν υπάρχουν και ισοπληθείς ομάδες στον χωρισμό, τότε αυτές οι κατανομές (διαμερίσεις) δεν είναι όλες διαφορετικές, διότι υπάρχει η φυσική διάταξη .

Στην περίπτωσή μας, οι χωρισμοί 1 και 2 είναι ίδιοι, διότι διαφέρουν μόνο ως προς τη διάταξη των δύο ομάδων και όχι ως το ποια στοιχεία περιέχουν οι ομάδες.

Αφού όμως οι ομάδες είναι 2 και

1 ^{ος} χωρισμός	{α,β}	{γ,δ}
2 ^{ος} χωρισμός	{γ,δ}	{α,β}

είναι επιπλέον διατεταγμένες, για να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών χωρισμών, πρέπει να διαιρέσουμε το αποτέλεσμα $\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$ που δίνει ο τύπος με $2!$, οπότε θα προκύψουν

$$\frac{4!}{2!} = \frac{4!}{2!2!2!} = \frac{24}{4 \cdot 2} = 3 \text{ διαφορετικοί τρόποι.}$$

Συμπέρασμα

Αν ένα σύνολο A έχει $n = 2k$ στοιχεία και θέλουμε να το χωρίσουμε σε δύο μη διατεταγμένες ομάδες με k στοιχεία η καθεμιά, τότε έχουμε

$$N(2k | k, k) = \frac{n!}{k!k!2!}, \text{ δηλαδή } N(2k | k, k) = \frac{(2k)!}{k!k!2!} \text{ διαφορετικούς τρόπους,}$$

όπου με $N(2k | k, k)$ συμβολίζουμε το πλήθος αυτών των τρόπων.

Το συμπέρασμα αυτό γενικεύεται σε χωρισμό με τυχαίο πλήθος ομάδες, είτε με διαφορετικό πλήθος στοιχείων είτε και με ισοπληθείς ομάδες.

Σχόλιο

Γενικότερα με το συμβολισμό $\binom{n}{m,n,r,p,q}$ δηλώνουμε το πλήθος των τρόπων χωρισμού ενός συνόλου με n στοιχεία σε διατεταγμένες ομάδες με m,n,r,p,q στοιχεία στην κάθε ομάδα και $m+n+r+p+q=n$. Αν υπάρχουν ωστόσο και ισοπληθείς ομάδες, τότε δεν πρέπει να ξεχάσουμε διαιρέσουμε το αποτέλεσμα με τους κατάλληλους παράγοντες, δηλαδή τους αριθμούς που δείχνουν πόσες είναι στην κάθε περίπτωση οι ισοπληθείς ομάδες.

Παραδείγματα

(α) Ένα σύνολο με 10 στοιχεία χωρίζεται σε 3 ομάδες με 2,3,5 στοιχεία αντίστοιχα με $\frac{10!}{2!3!5!}$ διαφορετικούς τρόπους.

(β) Ένα σύνολο με 10 στοιχεία χωρίζεται σε 3 ομάδες με 3,3,4 στοιχεία αντίστοιχα με $\frac{10!}{3!3!4!2!}$ διαφορετικούς τρόπους,

διότι έχουμε και δύο (2) ισοπληθείς ομάδες, με 3 στοιχεία η καθεμιά.

(γ) Ένα σύνολο με 25 στοιχεία χωρίζεται σε 7 ομάδες με 2,3,4,4,4,4,4 στοιχεία αντίστοιχα με $\frac{25!}{2!3! \underbrace{4!4!4!4!}_{5\text{-παράγοντες}} 5!} = \frac{25!}{2!3!(4!)^5 5!}$,

διαφορετικούς τρόπους, διότι έχουμε και 5 ισοπληθείς ομάδες με 4 στοιχεία η καθεμιά.

(δ) Χωρίς καμία αλγεβρική σχέση ή τον τύπο που δίνει το πλήθος $\binom{n}{k}$ των συνδυασμών μπορούμε να αποδείξουμε ότι :

$$\binom{10}{4} \binom{6}{3} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = \binom{10}{1} \binom{9}{2} \binom{7}{3} \binom{4}{4}$$

Πραγματικά, το κάθε μέλος δείχνει το πλήθος των τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να χωρίσουμε ένα σύνολο με 10 στοιχεία σε 4 ομάδες με 4, 3, 2, 1 και 1, 2, 3, 4 στοιχεία αντίστοιχα.

Προφανώς, οι αριθμοί αυτοί οφείλουν να είναι ίσοι !

Γενίκευση

Αν ένα σύνολο θέλουμε να το χωρίσουμε σε $k = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_r$ μη διατεταγμένες ομάδες, από τις οποίες:

Οι k_1 περιέχουν n_1 στοιχεία, οι k_2 περιέχουν n_2 , ..., και οι k_r περιέχουν n_r στοιχεία, τότε έχουμε συνολικά

$$\frac{n!}{(n_1)^{k_1} \cdot (n_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (n_r)^{k_r} \cdot k_1! k_2! k_3! \dots k_r!}$$

διαφορετικούς τρόπους σχηματισμού αυτών των ομάδων, όπου $n = k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3 + \dots + k_r n_r$.

Αν τις ομάδες που προκύπτουν τις τοποθετήσαμε σε r διαφορετικά κελιά (ως να είναι ομάδες αντικειμένων που θα τις δώσουμε σε r άτομα), τότε το πλήθος αυτών των τοποθετήσεων είναι :

$$N = \frac{n!}{(n_1)^{k_1} \cdot (n_2)^{k_2} \cdots (n_r)^{k_r} \cdot k_1! k_2! k_3! \dots k_r!} \cdot r!$$

Εφαρμογή

Με πόσους τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε 8 αγόρια και 12 κορίτσια σε 4 ομάδες, αν κάθε ομάδα περιέχει δύο αγόρια και τρία κορίτσια ;

Λύση

Χωρίζουμε πρώτα τα 8 αγόρια σε 4 μη διατεταγμένες ομάδες των 2 ατόμων. Αυτό γίνεται με

$$\frac{8!}{(2!)^4 4!} \text{ τρόπους.}$$

Στη συνέχεια χωρίζουμε τα 12 κορίτσια σε 4 μη διατεταγμένες ομάδες των 3 ατόμων. Αυτό γίνεται

$$\text{με } \frac{12!}{(3!)^4 4!} \text{ τρόπους.}$$

Για να φτιάξουμε τώρα ομάδες των 5 ατόμων παίρνουμε μια ομάδα 2 αγοριών και μία 3 κοριτσιών για να τις ενώσουμε.

Ας πάρουμε λοιπόν μια διαμέριση σε 4 ομάδες αγοριών (2 μέλη στην κάθε ομάδα) και μία διαμέριση σε 4 ομάδες κοριτσιών (3 μέλη στην κάθε ομάδα) , για να δημιουργήσουμε ζεύγη που με την ένωσή τους θα δώσουν 4 ομάδες των $2 + 3 = 5$ ατόμων.

Εδώ είναι ως να θέλουμε να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε σε ζευγάρια m αγόρια και m κορίτσια, για να χορέψουν ένα τραγούδι. Αυτό , σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή γίνεται με $m!$ τρόπους, αφού το 1^ο αγόρια έχει m δυνατότητες να επιλέξει ταίρι, το 2^ο έχει $m-1$ δυνατότητες κλπ. Ας αναφέρουμε ότι εναλλακτικά είναι ως να θέλουμε να βρούμε το πλήθος των 1-1 συναρτήσεων $f : A \rightarrow A$ με $N(A) = m$. Στο πρόβλημά μας είναι προφανώς $m = 4$.

Επομένως μια διαμέριση $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ των αγοριών και μια διαμέριση $\{K, \Lambda, M, N\}$ μπορούν να δώσουν $4!$ ζευγάρια , πχ της μορφής $\{A, K\}, \{B, \Lambda\}, \{\Gamma, M\}, \{\Delta, N\}$, που το καθένα θα έχει δύο αγόρια και τρία κορίτσια.

Σύμφωνα λοιπόν με την πολλαπλασιαστική αρχή, μπορούμε να χωρίσουμε τα 8 αγόρια και τα 12 κορίτσια σε 4 ομάδες των 5 ατόμων, ώστε κάθε ομάδα περιέχει δύο αγόρια και τρία κορίτσια με

$$\frac{8!}{(2!)^4 4!} \cdot \frac{12!}{(3!)^4 4!} \cdot 4! = \frac{8!}{(2!)^4 4!} \cdot \frac{12!}{(3!)^4} = 38.808.000 \text{ τρόπους.}$$

Άλλος τρόπος

Σχηματίζουμε αρχικά μια ομάδα με 2 αγόρια και μία με 3 κορίτσια με $\binom{8}{2}\binom{12}{3}$ τρόπους.

Στη συνέχεια, από τα παιδιά που απέμειναν, σχηματίζουμε ξανά μια ομάδα με 2 αγόρια και μία με 3 κορίτσια με $\binom{6}{2}\binom{9}{3}$ τρόπους.

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο και με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε

$$\binom{8}{2}\binom{12}{3} \cdot \binom{6}{2}\binom{9}{3} \cdot \binom{4}{2}\binom{6}{3} \cdot \binom{2}{2}\binom{3}{3} = \binom{8}{2}\binom{12}{3} \cdot \binom{6}{2}\binom{9}{3} \cdot \binom{4}{2}\binom{6}{3}$$

τρόπους για να χωρίσουμε τα 20 παιδιά σε 4 πεντάδες με δύο αγόρια και 3 κορίτσια.

Όμως αυτές οι τετράδες είναι διατεταγμένες, διότι κάθε ομάδα αγοριών όπως και κάθε ομάδα κοριτσιών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων. Πρέπει λοιπόν να διαιρέσουμε τον παραπάνω αριθμό με $4!$, όσες είναι και οι μεταθέσεις των τεσσάρων στοιχείων.

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι το ζητούμενο πλήθος χωρισμού σε ομάδες είναι

$$\binom{8}{2}\binom{12}{3} \cdot \binom{6}{2}\binom{9}{3} \cdot \binom{4}{2}\binom{6}{3} \cdot \frac{1}{4!} = \binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3} \cdot \frac{1}{4!} = \frac{8!}{(2!)^4} \cdot \frac{12!}{(3!)^4} \cdot \frac{1}{4!}$$

Κατανομή διαφορετικών αντικειμένων σε άτομα (κελιά)

Μέθοδος

Θεωρούμε ότι έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα και θέλουμε να τα δώσουμε (τοποθετήσουμε) σε k άτομα (διαφορετικά κελιά)

Υποθέτουμε ότι η κατανομή των n αντικειμένων έχει τη μορφή

$$n = \underbrace{n_1 + n_1 + \dots + n_1}_{k_1 \text{ όροι}} + \underbrace{n_2 + n_2 + \dots + n_2}_{k_2 \text{ όροι}} + \dots + \underbrace{n_p + n_p + \dots + n_p}_{k_p \text{ όροι}} + \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{m \text{ όροι}}$$

όπου $k_1 + k_2 + \dots + k_p + m = k$, δηλαδή των πλήθος των μη μηδενικών και των μηδενικών ομάδων είναι συνολικά k . Μπορούμε τότε να τοποθετήσουμε τα n αντικείμενα στα k κελιά (να δώσουμε τα n αντικείμενα σε k άτομα) με!

$$N(n, k) = \frac{n!}{(n_1!)^{k_1} \cdot (n_2!)^{k_2} \dots (n_p!)^{k_p} \cdot k_1! \cdot k_2! \dots k_p!} \cdot \frac{k!}{m!} \text{ τρόπους.}$$

Ας σημειώσουμε ότι στον τύπο αυτό ο παράγοντας

$$\frac{n!}{(n_1!)^{k_1} \cdot (n_2!)^{k_2} \dots (n_p!)^{k_p} \cdot k_1! \cdot k_2! \dots k_p!}$$

δίνει το πλήθος των **διαφορετικών τρόπων** που μπορούμε να χωρίσουμε τα n αντικείμενα σε $k_1 + k_2 + \dots + k_p$ μη κενές ομάδες, ενώ ο παράγοντας $\frac{k!}{m!}$ δείχνει το πλήθος των τρόπων

(επαναληπτικών μεταθέσεων), με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε (να βάλουμε στα k κελιά) όλες τις $k_1 + k_2 + \dots + k_p + m = k$ ομάδες, κενές και μη. Προφανώς στο κλάσμα $\frac{k!}{m!}$ το $m!$ στον

παρονομαστή δηλώνει ότι οι m ομάδες είναι κενές και προφανώς ίδιες (τις βλέπουμε δηλαδή ως m ίδια νέα αντικείμενα, αν και είναι κενές ομάδες).

Θυμίζουμε ότι ο χωρισμός των n αντικειμένων σε ομάδες προϋποθέτει ότι οι ομάδες είναι μη κενές.

Ωστόσο, όταν στις μη κενές ομάδες προσθέσουμε και m κενές ομάδες και - μόνο τότε - όλες τις k ομάδες θέλουμε να τις τοποθετήσουμε σε k κουτιά (κελιά, άτομα κλπ), τότε **συμβατικά** μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο χωρισμός σε k τέτοιες (μικτές) ομάδες γίνεται με

$$\frac{n!}{(n_1!)^{k_1} \cdot (n_2!)^{k_2} \dots (n_p!)^{k_p} \cdot k_1! \cdot k_2! \dots k_p! \cdot m!}$$

τρόπους (αριθμός που δεν είναι πάντα φυσικός) αλλά η τοποθέτηση των ομάδων στα $k_1 + k_2 + \dots + k_p + m = k$ κελιά γίνεται όπως είναι φυσικό με

$$\frac{n!}{(n_1!)^{k_1} \cdot (n_2!)^{k_2} \dots (n_p!)^{k_p} \cdot k_1! \cdot k_2! \dots k_p! \cdot m!} \cdot k! \text{ τρόπους}$$

(αριθμός που είναι πάντα φυσικός), αφού το $k!$ δηλώνει τον πλήθος των μεταθέσεων των k αυτών ομάδων, ως να είναι διαφορετικές (που όμως δεν είναι !!!).

Επομένως, ως τελικό συμπέρασμα θα μπορούσαμε να πούμε ότι η τοποθέτηση των n αντικειμένων στα k αυτά κελιά (με τα m να παραμένουν κενά κάθε φορά) γίνεται με

$$N(n,k) = \frac{n! \cdot k!}{(n_1!)^{k_1} \cdot (n_2!)^{k_2} \cdots (n_p!)^{k_p} \cdot k_1! \cdot k_2! \cdots k_p! \cdot m!} \text{ τρόπους.}$$

Αυτό καθιστά τον τύπο ευκολομνημόνευτο, αν και στην πράξη κάθε φορά εξηγούμε όλη τη διαδικασία βήμα- βήμα.

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορούμε να δώσουμε 5 διαφορετικά βιβλία σε 6 παιδιά, με τρόπο ώστε κάθε φορά τρία ακριβώς παιδιά, όχι πάντα τα ίδια, να μην παίρνουν βιβλία και κανένα να μην πάρει τρία βιβλία ;

Λύση

Αφού κανένα παιδί δεν μπορεί να πάρει 3 βιβλία, η μόνη κατανομή είναι $5 = 2 + 2 + 1 + 0 + 0 + 0$. Μπορούμε λοιπόν να δώσουμε 5 διαφορετικά βιβλία σε 6 παιδιά, με τρόπο ώστε κάθε φορά τρία παιδιά, όχι πάντα τα ίδια, να μην πάρουν βιβλία και κανένα μην πάρει 3 βιβλία με

$$\frac{5!}{2!2!1!} \cdot \frac{6!}{2!3!} = \frac{5!6!}{2!2!1!2!3!} \text{ τρόπους.}$$

Η εξήγηση που δίνουμε σε έναν μαθητή για αυτή την απάντηση είναι :

- ♦ Χωρίζουμε τα 5 βιβλία στις τρεις ομάδες με 2, 2, 1 βιβλία με $\frac{5!}{2!2!1!}$ διαφορετικούς τρόπους.
- ♦ Τοποθετούμε σε μια σειρά τις 3 αυτές ομάδες και τις 3 ίδιες κενές (μηδενικές) ομάδες, δηλαδή συνολικά 6 στοιχεία με ίδια τα 3 από αυτά, με $\frac{6!}{3!}$ τρόπους.
- ♦ Από την πολλαπλασιαστική αρχή παίρνουμε τελικά $\frac{5!}{2!2!1!} \cdot \frac{6!}{2!3!} = \frac{5!6!}{2!2!1!2!3!}$ τρόπους.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Χωρισμός σε ομάδες

Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο με N στοιχεία και θέλουμε με τα στοιχεία του να φτιάξουμε $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_p$ ομάδες, έτσι ώστε :

- k_1 ομάδες έχουν από v_1 στοιχεία
- k_2 ομάδες έχουν από v_2 στοιχεία
-
- k_p ομάδες έχουν από v_p στοιχεία .

(α) Το πλήθος των *μη διατεταγμένων ομάδων*, στις οποίες **η διάταξη των στοιχείων κάθε ομάδας είναι αδιάφορη**, ισούται με

$$\binom{N}{(k_1, v_1), (k_2, v_2), \dots, (k_p, v_p)} = \frac{N!}{(v_1!)^{k_1} \cdot (v_2!)^{k_2} \dots (v_p!)^{k_p} \cdot k_1! \cdot k_2! \dots k_p!}$$

Σημειώνουμε ότι ο παρονομαστής δημιουργείται από παράγοντες της μορφής $(v_i!)^{k_i} \cdot k_i!$, όπου :

- το $v_i!$ γράφεται διότι η καθεμία από τις k_i ομάδες έχει v_i στοιχεία,
- το k_i στον εκθέτη γράφεται διότι έχουμε k_i ομάδες,
- το $k_i!$ γράφεται διότι δεν θέλουμε διάταξη στις k_i ισοπληθείς ομάδες.

(β) Ας θεωρήσουμε τώρα ότι έχουμε και ισοπληθείς ομάδες και ότι μας ενδιαφέρει η θέση της κάθε τέτοιας ομάδας. Το πλήθος των *μερικώς διατεταγμένων αυτών ομάδων*, στις οποίες **η διάταξη των στοιχείων κάθε ομάδας είναι αδιάφορη**, ισούται με

$$\binom{N}{(k_1, v_1), (k_2, v_2), \dots, (k_p, v_p)} = \frac{N!}{(v_1!)^{k_1} \cdot (v_2!)^{k_2} \dots (v_p!)^{k_p}}$$

Εδώ το γινόμενο $k_1! \cdot k_2! \dots k_p!$ απουσιάζει διότι στις ισοπληθείς ομάδες μάς ενδιαφέρει, στην

περίπτωση που μελετάμε, η θέση της κάθε ομάδας μέσα στην σχηματισμό που δημιουργείται .

Για παράδειγμα η διάταξη $\langle \{a, b\}, \{c, d\}, \{e, z\} \rangle$ των τριών ισοπληθών ομάδων $\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, z\}$ είναι διαφορετική από τις διατάξεις $\langle \{a, b\}, \{e, z\}, \{c, d\} \rangle$, $\langle \{e, z\}, \{a, b\}, \{c, d\} \rangle$ κλπ, των οποίων φυσικά το πλήθος είναι $3! = 6$.

(γ) Το πλήθος των *μη διατεταγμένων ομάδων*, στις οποίες όμως **η διάταξη των στοιχείων κάθε ομάδας μετράει**, ισούται με

$$\binom{N}{(k_1, v_1), (k_2, v_2), \dots, (k_p, v_p)} = \frac{N!}{k_1! \cdot k_2! \dots k_p!}$$

Εδώ ο παράγοντας $(v_1!)^{k_1} \cdot (v_2!)^{k_2} \dots (v_p!)^{k_p}$ απουσιάζει, διότι στην κάθε ομάδα με v_i στοιχεία έχει σημασία η διάταξη των στοιχείων της.

Εφαρμογή

Οι 300 μαθητές ενός Σχολείου θα πάνε εκδρομή. Το πρακτορείο διαθέτει δύο πούλμαν των 30 θέσεων και τέσσερα πούλμαν των 60 θέσεων. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιβιβαστούν τα παιδιά, αν

(α) Οι θέσεις στα πούλμαν δεν είναι αριθμημένες.

(β) Οι θέσεις είναι αριθμημένες και έχει σημασία που θα καθίσει ο κάθε μαθητής.

Λύση

(α) Ας θεωρήσουμε ότι τα πούλμαν είναι όλα διαφορετικά, αφού πχ έχουν διαφορετικό αριθμό κυκλοφορίας. Αφού δεν ενδιαφέρει που θα καθίσει το κάθε παιδί, σύμφωνα με όσα έχουμε περιγράψει παραγράψι παραπάνω, έχουμε :

$$\frac{300!}{30! 30! 60! 60! 60! 60!} \text{ τρόπους.}$$

Αν όμως θεωρήσουμε ότι τα δύο 30-θέσια πούλμαν είναι ίδια, όπως επίσης ίδια είναι και τα τέσσερα 60-θέσια πούλμαν, τότε το ζητούμενο πλήθος είναι :

$$\frac{300!}{30! 30! (2!) 60! 60! 60! 60! (4!)}$$

Στους παρονομαστές συμπληρώσαμε τους παράγοντες 2! και 4! διότι τα δύο μικρά πούλμαν είναι ίδια (πχ άσπρα), όπως επίσης και τα τέσσερα μεγάλα πούλμαν είναι ίδια μεταξύ τους(μπλε).

(β) Επειδή οι θέσεις είναι αριθμημένες και όλα τα πούλμαν είναι διαφορετικά, έχει σημασία τόσο το πούλμαν όσο και η θέση που θα καθίσει ο κάθε μαθητής.

Στο σχετικό κλάσμα $\frac{300!}{30! 30! 60! 60! 60! 60!}$ θα πολλαπλασιάσουμε με τους αριθμούς 30!30! για τα δύο

μικρά και με 60!60!60!60! για τα 4 μεγάλα πούλμαν, αφού σε όλα τα πούλμαν έχει σημασία που θα καθίσουν οι μαθητές. Συνεπώς οι 300 μαθητές μπορούν να επιβιβαστούν με 300 !!! τρόπους, ως να είχαν δηλαδή ένα πούλμαν των 300 θέσεων !

(β) Επειδή οι θέσεις είναι αριθμημένες και όλα τα πούλμαν είναι διαφορετικά, έχει σημασία τόσο το πούλμαν όσο και η θέση που θα καθίσει ο κάθε μαθητής.

Στο σχετικό κλάσμα $\frac{300!}{30! 30! 60! 60! 60! 60!}$ θα πολλαπλασιάσουμε με τους αριθμούς 30!30! για τα δύο

μικρά και με 60!60!60!60! για τα 4 μεγάλα πούλμαν, αφού σε όλα τα πούλμαν έχει σημασία που θα καθίσουν οι μαθητές. Συνεπώς οι 300 μαθητές μπορούν να επιβιβαστούν με 300 !!! τρόπους, ως να είχαν δηλαδή ένα πούλμαν των 300 θέσεων !

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 2

Προσθήκη 3 - Σελίδες (14-17)**20-11-2025****Χωρισμός σε ομάδες και διανομή σε ρόλους**

Στο πρόβλημα που ακολουθεί δίνεται ένα ακόμα παράδειγμα χωρισμού ενός συνόλου σε ομάδες (υποσύνολα) που δεν έχουν κοινά στοιχεία και είναι μη κενά. Κάθε τέτοιος χωρισμός λέγεται γενικά διαμέριση του συνόλου.

Τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα είναι αυτά που χωρίζονται σε δύο σκέλη :

♦ Το πρώτο σκέλος είναι να χωρίσουμε τα διακεκριμένα αντικείμενα του δοσμένου συνόλου σε ομάδες με προκαθορισμένο πλήθος στοιχείων στην κάθε ομάδα αλλά και προκαθορισμένο πλήθος ομάδων που έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Μας ζητείται για παράδειγμα να χωρίσουμε ένα σύνολο με 20 στοιχεία σε τρία υποσύνολα (ομάδες) σε 3 υποσύνολα των 5 στοιχείων, ένα υποσύνολο με 3 στοιχεία και ένα υποσύνολο με 2 στοιχεία. Έχουμε επομένως 5 ομάδες (3,5), (1,3) και (1,2) και προφανώς ισχύει ότι $3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 20$.

Ο χωρισμός σε ομάδες γίνεται είτε έμμεσα με χρήση συνδυασμών, είτε απευθείας με χρήση του τύπου. Εδώ για παράδειγμα, ο σχετικός τύπος δίνει ότι το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$N = \frac{20!}{5!5!5!(3!)3!2!}$$

Το 3! έχει τεθεί στον παρονομαστή για να μην έχουμε διάταξη των 3 ισοπληθών ομάδων. Είναι ένα λεπτό αλλά βασικό σημείο στην εύρεση του πλήθους των διαφορετικών τρόπων που χωρίζεται σε ένα σύνολο σε μη κενά και ξένα υποσύνολα όταν δεν θέλουμε κανενός είδους διάταξη στα σχηματιζόμενα υποσύνολα.

♦ Το δεύτερο σκέλος είναι να δώσουμε στις ομάδες κάποιο ρόλο, ένα διαφορετικό πχ όνομα στην καθεμιά.

Η καλύτερη τακτική σε τέτοια προβλήματα είναι να κάνουμε τον χωρισμό σε μη διατεταγμένες ομάδες και στη συνέχεια να κάνουμε κατανομή αυτών των ομάδων σε ρόλους, πχ να τις τοποθετήσουμε σε διαφορετικά κουτιά, να τις αναθέσουμε μια αποστολή κλπ.

Αν για παράδειγμα είχαμε 20 στρατιώτες και τις χωρίζαμε στις παραπάνω 5 ομάδες για να πάνε σε 5 διαφορετικά φυλάκια, τότε θα είχαμε $N = \frac{20!}{5!5!5!(3!)3!2!} \cdot 5!$ διαφορετικούς τρόπους κατανομής και αποστολής

των στρατιωτών σε αυτούς τους ρόλους.

Αν τα 20 στοιχεία ήταν διαφορετικά μολύβια και θέλαμε να τα βάλουμε (α) σε 3 κουτιά χωρητικότητας 5, (β) ένα κουτί των 3 και (γ) ένα των 2, όπου τα 3 κουτιά με την ίδια χωρητικότητα είναι ίδια(ταυτόσημα), τότε θα είχαμε :

$$N = \frac{20!}{5!5!5!(3!)3!2!} \text{ τρόπους.}$$

Το παράδειγμα που ακολουθεί, σε συνδυασμό με όσα έχουμε αναφέρει και σε άλλα σημεία του βιβλίου ή του συμπληρωματικού υλικού καθιστά τον τρόπο που εργαζόμαστε αρκετά σαφή και κατανοητό.

Εφαρμογή

Έχουμε 30 διαφορετικά μολύβια. Θέλουμε να τα χωρίσουμε και να τα βάλουμε:

- σε 2 κουτιά που χωράνε από 3 μολύβια το καθένα και
- σε 4 κουτιά που χωράνε από 6 μολύβια το καθένα.

(α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να κάνουμε τον χωρισμό και τη διανομή των μολυβιών στα κουτιά, αν όλα τα κουτιά θεωρούνται διαφορετικά μεταξύ τους;

(β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να κάνουμε τον χωρισμό και τη διανομή των μολυβιών, αν τα δύο κουτιά χωρητικότητας 3 είναι ίδια μεταξύ τους και τα τέσσερα κουτιά χωρητικότητας 6 είναι επίσης ίδια μεταξύ τους (τα κουτιά διακρίνονται μόνο από τη χωρητικότητα και όχι από κάποιο «όνομα»);

Λύση

(α) Όλα τα κουτιά είναι διαφορετικά (διακεκριμένα)

Θεωρούμε λοιπόν ότι τα κουτιά έχουν «ονόματα», είναι δηλαδή διακεκριμένα. Έστω ότι τα κουτιά είναι των παρακάτω ειδών:

- Μικρά χωρητικότητας 3 μολυβιών: K_1, K_2 .
- Μεγάλα κουτιά χωρητικότητας 6 μολυβιών: L_1, L_2, L_3, L_4 .

Θα μοιράσουμε τα 30 διαφορετικά μολύβια στα κουτιά αυτά. Επειδή όλα τα κουτιά είναι διαφορετικά (διακεκριμένα), έχει σημασία όχι μόνο ποια μολύβια θα είναι μαζί, αλλά και σε ποιο συγκεκριμένο κουτί θα πάνε.

Μπορούμε να σκεφτούμε τη διανομή «βήμα – βήμα»:

- Πρώτα γεμίζουμε το κουτί K_1 : διαλέγουμε 3 από τα 30 μολύβια. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{30}{3}$ τρόπους.
- Μετά γεμίζουμε το κουτί K_2 : έχουν μείνει 27 μολύβια, οπότε έχουμε $\binom{27}{3}$ τρόπους.
- Μετά γεμίζουμε το κουτί L_1 : έχουν μείνει 24 μολύβια, οπότε έχουμε $\binom{24}{6}$ τρόπους.
- Μετά γεμίζουμε το κουτί L_2 : έχουν μείνει 18 μολύβια, οπότε έχουμε $\binom{18}{6}$ τρόπους.
- Μετά γεμίζουμε το κουτί L_3 : έχουν μείνει 12 μολύβια, οπότε έχουμε $\binom{12}{6}$ τρόπους.
- Τέλος γεμίζουμε το κουτί L_4 με τα 6 που απομένουν: αυτό γίνεται με $\binom{6}{6} = 1$ τρόπο.

Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων διανομής των μολυβιών είναι:

$$N = \binom{30}{3} \binom{27}{3} \binom{24}{6} \binom{18}{6} \binom{12}{6} \binom{6}{6} \quad (1)$$

Θυμίζουμε τώρα ότι

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{ή} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε όλους τους συνδυασμούς και απλοποιήσουμε τη σχέση (1), παίρνουμε έναν πιο «συμπυκνωμένο» τύπο με παραγοντικά. Πράγματι, παίρνουμε τελικά:

$$N = \frac{30!}{3! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!} = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4}$$

Άρα, όταν όλα τα κουτιά είναι διαφορετικά, ο αριθμός των τρόπων διανομής των 30 μολυβιών είναι

$$N = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4}.$$

Άλλος τρόπος

Λύση σε δύο στάδια: «Χωρισμός σε ομάδες» και «Διανομή στα κουτιά»

Το ίδιο πρόβλημα μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε σε δύο χωριστά στάδια, όπως συνηθίζεται στη συνδυαστική.

Στάδιο Α: Χωρίζουμε τα 30 διαφορετικά μολύβια σε ομάδες με μεγέθη 3, 3, 6, 6, 6, 6, χωρίς να μας ενδιαφέρει ακόμη ποιο κουτί θα πάρει ποια ομάδα.

Στάδιο Β: Αναθέτουμε τις ομάδες στα συγκεκριμένα κουτιά.

Ας δούμε το κάθε στάδιο ξεχωριστά.

Στάδιο Α – Χωρισμός σε ομάδες :

Θέλουμε να χωρίσουμε τα 30 μολύβια σε 2 ομάδες των 3 και 4 ομάδες των 6. Εδώ οι ομάδες του ίδιου μεγέθους δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους (μια ομάδα των 3 και μια άλλη ομάδα των 3 θεωρούνται ίδιες ως «τύπος» ομάδας). Ο αριθμός των διαφορετικών χωρισμών σε ομάδες, χωρίς δηλαδή τη φυσική διάταξη στις ομάδες, είναι:

$$N_1 = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4 \cdot 2! \cdot 4!}.$$

• Στο 30! που έχουμε στον αριθμητή απαριθμούμε όλες τις δυνατές σειρές των 30 μολυβιών. Στη συνέχεια:

- Διαιρούμε με 3! για κάθε ομάδα των 3 μολυβιών, γιατί μέσα σε κάθε τέτοια ομάδα η σειρά των μολυβιών δεν παίζει ρόλο.
- Διαιρούμε με 6! για κάθε ομάδα των 6, για τον ίδιο λόγο.
- Τέλος, διαιρούμε με 2! γιατί μπορούμε να ανταλλάξουμε μεταξύ τους τις 2 ομάδες των 3 χωρίς να πάρουμε νέο χωρισμό και με 4! για τον ίδιο λόγο για τις 4 ομάδες των 6.

Στάδιο Β – Διανομή των ομάδων στα κουτιά:

Τώρα οι 2 ομάδες των 3 μολυβιών πρέπει να μουν στα 2 διαφορετικά κουτιά χωρητικότητας 3. Αυτό μπορεί να γίνει με 2! τρόπους (ανταλλάσσουμε τις δύο ομάδες).

Οι 4 ομάδες των 6 πρέπει να μουν στα 4 κουτιά χωρητικότητας 6: Αυτό μπορεί να γίνει με 4! τρόπους. Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι:

$$N = N_1 \cdot 2! \cdot 4! = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4 \cdot 2! \cdot 4!} \cdot 2! \cdot 4! = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4}$$

Παίρνουμε ακριβώς την ίδια απάντηση με την προηγούμενη μέθοδο, όπως πρέπει φυσικά.

Συμπέρασμα:

Όταν όλα τα κουτιά είναι διαφορετικά, ο αριθμός των δυνατών διανομών είναι

$$N = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4}$$

(β) Τα κουτιά της ίδιας χωρητικότητας θεωρούνται ίδια μεταξύ τους

Τώρα αλλάζουμε υπόθεση στο πρόβλημα:

- Τα δύο κουτιά χωρητικότητας 3 θεωρούνται ίδια μεταξύ τους (δεν ξεχωρίζουμε ποιο είναι το πρώτο και ποιο το δεύτερο).
- Τα τέσσερα κουτιά χωρητικότητας 6 θεωρούνται επίσης ίδια μεταξύ τους.
- Βέβαια, ένα κουτί χωρητικότητας 3 δεν συγχέεται με ένα κουτί χωρητικότητας 6 – τα δύο είδη κουτιών παραμένουν διαφορετικά.

Τι σημαίνει αυτό; Αν έχουμε έναν τρόπο διανομής και απλώς ανταλλάξουμε τις θέσεις των δύο μικρών κουτιών, δε θεωρούμε ότι αυτός είναι νέος τρόπος: τα δύο μικρά κουτιά είναι ταυτόσημα. Το ίδιο ισχύει και για τα τέσσερα μεγάλα κουτιά.

Ξεκινάμε από τον αριθμό των διανομών όταν όλα τα κουτιά είναι διαφορετικά:

$$N_1 = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4}$$

Πόσες φορές όμως αυτός ο αριθμός δηλώνει το ίδιο αποτέλεσμα, όταν έχουμε ταυτόσημα κουτιά του ίδιου τύπου;

- Μπορούμε να ανταλλάξουμε τα δύο μικρά κουτιά με $2!$ τρόπους χωρίς να αλλάξει ουσιαστικά η διανομή.
- Μπορούμε επίσης να αντιμεταθέσουμε τα τέσσερα μεγάλα κουτιά με $4!$ τρόπους.

Άρα κάθε «ουσιαστικά διαφορετική» διανομή (με ταυτόσημα κουτιά) έχει μετρηθεί $2! \cdot 4!$ φορές στον N_1 .

Για να βρούμε τον αριθμό των διαφορετικών διανομών, όταν τα κουτιά του ίδιου τύπου είναι ίδια, πρέπει να διαιρέσουμε με αυτόν τον αριθμό.

Επομένως:

$$N_2 = \frac{N_1}{2!4!} = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4} \cdot \frac{1}{2!4!} = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4 2!4!}$$

Συμπέρασμα

Όταν τα κουτιά της ίδιας χωρητικότητας (τα δύο των 3 μολυβιών και τα τέσσερα των 6 μολυβιών) είναι ίδια μεταξύ τους, ο αριθμός των δυνατών διανομών είναι:

$$N_2 = \frac{30!}{(3!)^2 \cdot (6!)^4 \cdot 2! \cdot 4!}$$

Ο αριθμός N_2 που βρήκαμε συμπίπτει με τον αριθμό των τρόπων που χωρίζουμε τα 30 διαφορετικά μολύβια σε 2 ομάδες των 3 και 4 ομάδες των 6, όταν δεν μας ενδιαφέρει καθόλου η σειρά των ομάδων του ίδιου μεγέθους.

Αυτό είναι αναμενόμενο, γιατί όταν τα κουτιά της ίδιας χωρητικότητας είναι ίδια μεταξύ τους, η διανομή καθορίζεται ουσιαστικά μόνο από το ποια μολύβια αποτελούν τις ομάδες των 3 και των 6, δηλαδή από τον ίδιο ακριβώς χωρισμό σε ομάδες.

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 3

Προσθήκη 4 - Σελίδες (18-28)**23-11-2025****Το δυωνυμικό ανάπτυγμα**

Ακόμα και από τις πιο στοιχειώσεις σημειώσεις στη Συνδυαστική, δεν μπορεί να λείπει το αποκαλούμενο **δυωνυμικό ανάπτυγμα**.

Από τις πρώτες γυμνασιακές τάξεις γνωρίζουμε τις παρακάτω ταυτότητες :

$$(α) \quad (α + β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$$

$$(β) \quad (α + β)^3 = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + α^4$$

Με μια μικρή αλγεβρική προσπάθεια, εύκολα μπορεί να προκύψει ακόμα η ταυτότητα:

$$(γ) \quad (α + β)^4 = α^4 + 4α^3β + 6α^2β^2 + 4αβ^3 + α^4$$

Εύλογα γεννιέται το ερώτημα:

Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε πχ τα αναπτύγματα $(α + β)^5$, $(α + β)^6$, $(α + β)^7$ και γενικά το ανάπτυγμα $(α + β)^ν$, όπου ν είναι τυχαίος φυσικός αριθμός;

Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα τη δίνει η παρακάτω θεμελιώδης πρόταση.

Πρόταση

Αν ο ν είναι φυσικός αριθμός, τότε :

$$(α + β)^ν = \binom{ν}{0} α^ν + \binom{ν}{1} α^{ν-1}β + \binom{ν}{2} α^{ν-2}β^2 + \dots + \binom{ν}{ν-2} α^2β^{ν-2} + \binom{ν}{ν-1} α^1β^{ν-1} + \binom{ν}{ν} β^ν$$

Απόδειξη

Θα δώσουμε μια απλή **συνδυαστική απόδειξη**, αν και συνήθως συναντάμε αποδείξεις που βασίζονται στη μαθηματική επαγωγή.

Προκαταβολικά να πούμε ότι ο τυχαίος όρος του αναπτύγματος έχει τη μορφή

$$T(ν, κ) = \binom{ν}{κ} α^{ν-κ}β^κ, \text{ με } κ = 0, 1, 2, \dots, ν.$$

Ο όρος μάλιστα αυτός έχει τη θέση $\kappa + 1$ μέσα στο ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^v$, μετρώντας από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Ο γενικός όρος θέτοντας τιμές στο κ , δηλαδή θέτοντας $\kappa = 0, \kappa = 1, \kappa = 2, \dots, \kappa = v$ δίνει όλους τους όρους του αναπτύγματος.

Ας δούμε όμως την απόδειξη, αν και αυτή ποτέ δεν θα ζητηθεί στις σχολικές τάξεις.

Βλέπουμε ότι κάθε όρος του αναπτύγματος έχει τη μορφή $\mu \alpha^{v-\kappa} \beta^\kappa$, όπου μ είναι ένας συντελεστής που πρέπει να προσδιορίσουμε.

Ας γράψουμε αρχικά :

$$(\alpha + \beta)^v = \underbrace{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)(\alpha + \beta) \dots (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)}_{v - \text{παράγοντες}} \quad (1)$$

Για να πάρουμε το μονώνυμο $\alpha^{v-\kappa} \beta^\kappa$ πρέπει να επιλέξουμε από το παραπάνω γινόμενο κ παράγοντες, όλοι τους φυσικά ίσοι με $\alpha + \beta$, ώστε να δημιουργήσουμε το β^κ . Το $\alpha^{v-\kappa}$ θα το δημιουργήσουν οι υπόλοιποι $v - \kappa$ παράγοντες με έναν και μοναδικό τρόπο.

Αλλά κ παράγοντες ίσοι με το $\alpha + \beta$ μπορούμε να πάρουμε από τους v παράγοντες που έχει το

γινόμενο (1) με $\binom{v}{\kappa}$ τρόπους.

Επομένως, ο συντελεστής του $\alpha^{v-\kappa} \beta^\kappa$ στον ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^v$ είναι ο $\binom{v}{\kappa}$ και έτσι έχουμε τελειώσει.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι :

$$(\alpha + \beta)^v = \binom{v}{0} \alpha^v + \binom{v}{1} \alpha^{v-1} \beta^1 + \binom{v}{2} \alpha^{v-2} \beta^2 + \dots + \binom{v}{v-2} \alpha^2 \beta^{v-2} + \binom{v}{v-1} \alpha^1 \beta^{v-1} + \binom{v}{v} \beta^v$$

Σχόλια

(α) Επειδή $\binom{v}{\kappa} = \binom{v}{v-\kappa}$ προκύπτει ότι στο ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^v$ οι συντελεστές των $\alpha^{v-\kappa} \beta^\kappa$ και

$\alpha^\kappa \beta^{v-\kappa}$ είναι ίσοι.

Το ανάπτυγμα λοιπόν έχει μια ιδιαίτερη συμμετρία, αφού οι όροι που ισαπέχουν από τα άκρα έχουν τους ίδιους συντελεστές.

(β) Με χρήση του συμβόλου Σ για τα αθροίσματα, το ανάπτυγμα γράφεται :

$$(\alpha + \beta)^v = \sum_{\kappa=0}^v \binom{v}{\kappa} \alpha^{v-\kappa} \beta^{\kappa} \quad \text{ή} \quad (\alpha + \beta)^v = \sum_{\kappa=0}^v \binom{v}{\kappa} \alpha^{\kappa} \beta^{v-\kappa}$$

(γ) Για $\alpha = 1, \beta = x$ παίρνουμε ότι:

$$(1+x)^v = \sum_{\kappa=0}^v \binom{v}{\kappa} x^{\kappa} = \binom{v}{0} 1^0 + \binom{v}{1} x + \binom{v}{2} x^2 + \binom{v}{3} x^3 + \dots + \binom{v}{v} x^v$$

(δ) Ο παραπάνω τύπος για $x = 1$ (ή ο βασικός τύπος για $\alpha = \beta = 1$) δίνει :

$$(1+1)^v = \binom{v}{0} 1 + \binom{v}{1} \cdot 1 + \binom{v}{2} \cdot 1^2 + \binom{v}{3} \cdot 1^3 + \dots + \binom{v}{v} \cdot 1^v,$$

δηλαδή

$$\binom{v}{0} + \binom{v}{1} + \binom{v}{2} + \binom{v}{3} + \dots + \binom{v}{v} = 2^v \quad (2)$$

(ε) Ο παραπάνω τύπος $\binom{v}{0} + \binom{v}{1} + \binom{v}{2} + \binom{v}{3} + \dots + \binom{v}{v} = 2^v$ δηλώνει κάτι σημαντικό που περιγράφουμε στην παρακάτω πρόταση :

Πρόταση

Κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.

Πράγματι, κάθε υποσύνολο ενός συνόλου A με n στοιχεία έχει ή 0 ή 1 ή 2 ή ... ή n στοιχεία.

♦ Με 0 στοιχεία έχουμε μόνο ένα υποσύνολο, το κενό σύνολο.

♦ Με 1 στοιχείο έχουμε $\binom{v}{1}$ υποσύνολα.

♦ Με 2 στοιχεία έχουμε $\binom{v}{2}$ υποσύνολα.

.....

♦ Με v στοιχεία έχουμε $\binom{v}{v}$ υποσύνολα.

Αθροίζοντας και λόγω της σχέσης (2) συμπεραίνουμε ότι ένα σύνολο έχει :

$$\binom{v}{0} + \binom{v}{1} + \binom{v}{2} + \binom{v}{3} + \dots + \binom{v}{v} = 2^v \text{ υποσύνολα.}$$

Αυτό το συμπέρασμα θα δούμε ότι μπορούμε να το αποδείξουμε και με μεθόδους της Συνδυαστικής, χωρίς δηλαδή χρήση της άλγεβρας.

Παράδειγμα 1^ο

Να υπολογίσετε το άθροισμα :

$$S = \binom{n}{0} 3^0 + \binom{n}{1} 3^1 + \binom{n}{2} 3^2 + \dots + \binom{n}{n} 3^n$$

Λύση

Σύμφωνα με το διωνυμικό ανάπτυγμα και τον σχετικό τύπο παίρνουμε

$$S = \binom{n}{0} 3^0 + \binom{n}{1} 3^1 + \binom{n}{2} 3^2 + \dots + \binom{n}{n} 3^n = (1+3)^n = 4^n$$

Παράδειγμα 2^ο

Να βρεθεί ο συντελεστής του x^{10} στο ανάπτυγμα $(1+3x+3x^2+x^3)^5$.

Λύση

Είναι

$$(1+3x+3x^2+x^3)^5 = ((1+x)^3)^5 = (1+x)^{15}$$

Ο συντελεστής του x^{10} στο παραπάνω ανάπτυγμα είναι το

$$\binom{15}{10} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 = 3003$$

Παράδειγμα 3^ο

(α) Να βρεθεί ο συντελεστής του x^6 στο ανάπτυγμα $(x^3+2)^8$.

(β) Να βρεθεί ο όρος ο ανεξάρτητος του x στο ανάπτυγμα $\left(2x^3 - \frac{3}{x}\right)^{12}$.

Λύση

(α) Συντελεστής του x^6 στο ανάπτυγμα $(x^3+2)^8$.

Χρησιμοποιούμε το διωνυμικό θεώρημα:

$$(x^3 + 2)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} (x^3)^k 2^{8-k} = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} 2^{8-k} x^{3k}.$$

Ο γενικός όρος του αναπτύγματος είναι

$$T_k = \binom{8}{k} 2^{8-k} x^{3k}.$$

Θέλουμε τον όρο που περιέχει x^6 , άρα πρέπει να ισχύει

$$3k = 6 \Leftrightarrow k = 2.$$

Επομένως, ο ζητούμενος συντελεστής είναι

$$\binom{8}{2} 2^{8-2} = \binom{8}{2} 2^6.$$

Υπολογίζουμε:

$$\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28, \quad 2^6 = 64,$$

οπότε ο ζητούμενος συντελεστής είναι ο $28 \cdot 64 = 1792$.

Συνεπώς, ο συντελεστής του x^6 στο ανάπτυγμα του $(x^3 + 2)^8$ είναι 1792

(β) Ο όρος που είναι ανεξάρτητος του x στο ανάπτυγμα $\left(2x^3 - \frac{3}{x}\right)^{12}$.

Εφαρμόζουμε ξανά το διωνυμικό θεώρημα:

$$\left(2x^3 - \frac{3}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (2x^3)^{12-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k.$$

Ο γενικός όρος είναι

$$T_k = \binom{12}{k} (2x^3)^{12-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k.$$

Αναλύουμε τις δυνάμεις του x :

$$(2x^3)^{12-k} = 2^{12-k} x^{3(12-k)} \quad \text{και} \quad \left(-\frac{3}{x}\right)^k = (-3)^k x^{-k}.$$

Άρα

$$T_k = \binom{12}{k} 2^{12-k} (-3)^k x^{3(12-k)-k} = \binom{12}{k} 2^{12-k} (-3)^k x^{36-4k}.$$

Θέλουμε όρο ανεξάρτητο του x , δηλαδή η δύναμη του x να είναι 0:

$$36 - 4k = 0 \Leftrightarrow 4k = 36 \Leftrightarrow k = 9.$$

Άρα ο ζητούμενος όρος είναι ο T_9 :

$$T_9 = \binom{12}{9} 2^{12-9} (-3)^9 = \binom{12}{9} 2^3 (-3)^9.$$

Υπολογίζουμε τα επιμέρους:

$$\binom{12}{9} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220, \quad 2^3 = 8, \quad (-3)^9 = -3^9 = -19683.$$

Επομένως

$$T_9 = 220 \cdot 8 \cdot (-19683) = 1760 \cdot (-19683) = -34\,642\,080.$$

Συνεπώς, ο όρος ανεξάρτητος του x στο ανάπτυγμα του $\left(2x^3 - \frac{3}{x}\right)^{12}$ είναι ο αριθμός $-34\,642\,080$.

Παράδειγμα 4^ο

Σε μια σειρά έχουμε τα ψηφία 1, 2, 3, ..., 8, 9. Πόσες διαφορετικές προσθέσεις μπορούμε να δημιουργήσουμε, βάζοντας ανάμεσα στα ψηφία αυτά ένα ή περισσότερα συν (+); Για παράδειγμα, μια τέτοια πρόσθεση είναι η $123 + 4567 + 89$ που περιέχει δύο συν (+).

Λύση

Τα 9 ψηφία δημιουργούν ανάμεσά τους 8 κενά. Επιλέγουμε κάποια από αυτά και βάζουμε το σύμβολο **συν (+)**. Μπορούμε να πάρουμε ένα ή δύο ή τρία ή ...ή οκτώ κενά. Αφού αυτό γίνεται με

$$\binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \dots + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 2^8 - 1 = 255$$

τρόπους, συμπεραίνουμε ότι σχηματίζονται 255 διαφορετικές προσθέσεις.

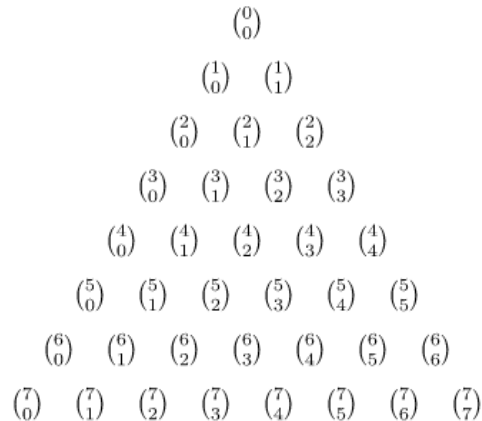
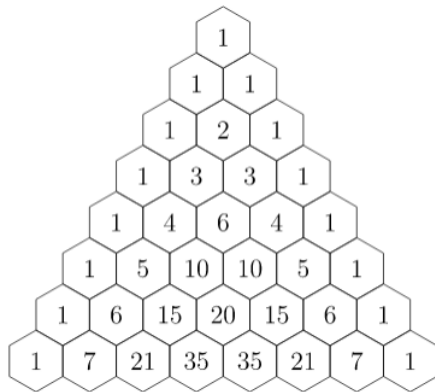
Σχόλιο

Σε καθένα από τα 8 κενά αντιστοιχίζουμε το 1 ή το 0, ανάλογα με τον θα βάλουμε συν ή όχι. Σχηματίζεται έτσι μια διάταξη από 8 στοιχεία, καθένα από τα οποία είναι 1 ή 0. Κάθε πρόσθεση αντιστοιχεί σε μία ακριβώς τέτοια διάταξη και αντιστρόφως. Αλλά το πλήθος αυτών των σχηματισμών, από την πολλαπλασιαστική αρχή, είναι 2^8 . Αφού έχουμε μία τουλάχιστον πρόσθεση, εξαιρούμε τη διάταξη $\underbrace{00 \dots 00}_{8 \text{ θέσεις}}$.

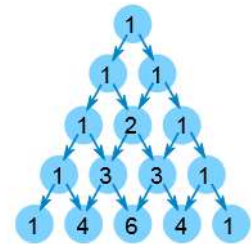
Επομένως το πλήθος των προσθέσεων που μπορούν να δημιουργηθούν είναι $2^8 - 1 = 255$

Το τρίγωνο του Pascal

Οι δυωνυμικοί συντελεστές $C(n, k) = \binom{n}{k}$ μπορούν να παρασταθούν σε μορφή ενός τριγώνου, που έχει την παρακάτω μορφή.



Το δεύτερο τρίγωνο δείχνει τι περιγράφει στην κάθε θέση το πρώτο τρίγωνο και αντιστρόφως. Ας παρατηρήσουμε ότι το άθροισμα των αριθμών κάθε γραμμής είναι δύναμη του 2 και αυτό αιτιολογείται και ως εξής:



Οι συντελεστές σε κάθε γραμμή περιγράφουν το ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^n$

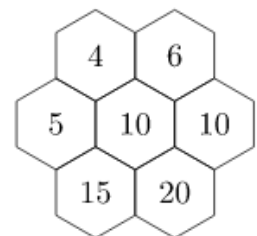
για $\alpha = \beta = 1$ και προφανώς το άθροισμα αυτό στην περίπτωση μας είναι $(\alpha + \beta)^n = (1 + 1)^n = 2^n$

Μια άλλη ιδιότητα που περιγράφει καθένα από τα τρίγωνα προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε αριθμός ισούται με το άθροισμα των δύο αριθμών της προηγούμενης γραμμής που βρίσκονται ακριβώς πάνω από τον αριθμό αυτό. Για παράδειγμα στην 5^η γραμμή και στο μεγάλο σχήμα είναι

$10 = 4 + 6 = 6 + 4$. Η γενική ιδιότητα που περιγράφεται με αυτόν τον τρόπο είναι η παρακάτω

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$

γνωστή άλλωστε και ως **ταυτότητα του Pascal**.



Οι πολυωνυμικοί συντελεστές

Είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο τον τρόπο που αναπτύσσουμε την παράσταση:

$$(\alpha + \beta)^v, v \in \mathbb{N}^*.$$

Το ανάπτυγμα αυτό είναι γνωστό ως **διωνυμικό ανάπτυγμα** και το συναντάμε πολύ συχνά σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών, κάτι που δείχνει και τη σπουδαιότητά του.

Θα δούμε τώρα πώς γενικεύεται αυτό το ανάπτυγμα. Θα βρούμε με άλλα λόγια τους συντελεστές του αναπτύγματος $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n, n \in \mathbb{N}^*.$

Οι συντελεστές αυτοί λέγονται πολυωνυμικοί συντελεστές και όπως θα δούμε δεν είναι δύσκολο να προσδιοριστούν.

Πρόταση 1

Ο συντελεστής $T(n_1, n_2, \dots, n_k)$ του όρου $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k}$ του αναπτύγματος $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ δίνεται από τον τύπο :

$$T(n_1, n_2, \dots, n_k) = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Απόδειξη

Μια και στη σχολική τάξη δεν γίνεται για τη γενικά περίπτωση ούτε καν μια μικρή αναφορά στο ανάπτυγμα αυτό, παρά μόνο στην περίπτωση $n = 2, k = 3$, κάτι που οδηγεί στη γνωστή μας ταυτότητα:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha,$$

θα δώσουμε μόνο μια περιληπτική συνδυαστική απόδειξη της παραπάνω πρότασης.

Κάθε όρος του αναπτύγματος έχει τη μορφή $M x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k}$, όπου όλοι οι εκθέτες είναι φυσικοί αριθμοί και το άθροισμά τους είναι n . Θα υπολογίσουμε το συντελεστή M .

Γράφουμε πρώτα :

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k) \cdots (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k).$$

Για να δημιουργήσουμε τον παράγοντα $x_1^{n_1}$ θα επιλέξουμε n_1 από τους παραπάνω n παράγοντες.

Αυτό γίνεται με $\binom{n}{n_1}$ τρόπους. Για να δημιουργήσουμε τον παράγοντα $x_2^{n_2}$ θα πάρουμε n_2 από

τους υπόλοιπους $n - n_1$ παράγοντες. Αυτό γίνεται με $\binom{n - n_1}{n_2}$ τρόπους. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο και εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή, παίρνουμε ότι ο συντελεστής με M του όρου $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k}$ είναι

$$\binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \dots \binom{n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

Τονίζουμε ότι το κλάσμα $\frac{n!}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k}$ που δίνει το συντελεστή του $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k}$ στο ανάπτυγμα δεν

είναι παρά το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων n στοιχείων $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ■

Αν αναζητήσουμε το άθροισμα όλων αυτών των συντελεστών, δεν έχουμε παρά να βάλουμε στη θέση όλων των μεταβλητών την τιμή 1 και θα δούμε ότι αυτό το άθροισμα είναι k^n .

Δεν κάνουμε άλλα σχόλια μια και ξεφεύγουν από τους σκοπούς αυτού του εισαγωγικού βιβλίου που αναφέρεται στη διδασκαλία της Συνδυαστικής στο σχολείο.

Πρόταση 2

Αν $n \in \mathbb{N}^*$, τότε $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k}$,

όπου οι εκθέτες διατρέχουν όλες τις δυνατές τιμές στο $\mathbb{N}$ που έχουν άθροισμα ίσο με n .

Οι συντελεστές $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ λέγονται **πολυωνυμικοί συντελεστές**.

Παράδειγμα

Ποιος είναι ο συντελεστής του $\alpha^2 \beta^3 \gamma^5$ στο ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta + \gamma)^{10}$;

Απάντηση

Όπως έχουμε αναφέρει παραπάνω, ο συντελεστής του $\alpha^2 \beta^3 \gamma^5$ είναι ο

$$\binom{10}{2, 3, 5} = \frac{10!}{2! 3! 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 6} = 10 \cdot 9 \cdot 7 = 630 \quad \blacksquare$$

Θυμίζουμε ότι οι πολυωνυμικοί συντελεστές δίνουν επίσης :

(i) Το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να βάλουμε σε μια σειρά $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ αντικείμενα,

όταν τα n_1 από αυτά είναι ίσα με a_1 , τα n_2 από αυτά είναι ίσα με a_2 και γενικά τα n_k από αυτά είναι ίσα με a_k .

(ii) Το πλήθος των τρόπων χωρισμού(διαμερίσεων) ενός συνόλου σε k μη κενά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, έτσι ώστε να έχουν αντίστοιχα $n_1, n_2, \dots, n_k$ στοιχεία.

Εφαρμογή 1

Να βρεθεί το πλήθος των όρων του αναπτύγματος $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Λύση

Κάθε όρος του αναπτύγματος έχει τη μορφή

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k}, \text{ με } n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

Το πλήθος λοιπόν των όρων του αναπτύγματος είναι όσες και οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

Αλλά το πλήθος αυτών των λύσεων είναι όσοι οι συνδυασμοί με επανάληψη k στοιχείων ανά n , δηλαδή

$$\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1} \quad \blacksquare$$

Εφαρμογή 2

Να βρεθεί ο συντελεστής του $\alpha^4 \beta^3 \gamma^2 \delta$ στο ανάπτυγμα της παράστασης $(\alpha - \beta + \gamma - \delta)^{10}$

Λύση

Όπως είναι αναμενόμενο, γράφουμε : $\alpha - \beta + \gamma - \delta = \alpha + (-1) + \gamma + (-1)$. Το πρόσημο του $\alpha^4 \beta^3 \gamma^2 \delta$ στο ανάπτυγμα του $(\alpha - \beta + \gamma - \delta)^{10}$ θα είναι το ίδιο με το πρόσημο του $1^4 (-1)^3 1^2 (-1) = +1$, δηλαδή (+).

Άρα ο ζητούμενος συντελεστής είναι ο :

$$\frac{10!}{4!3!2!1!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 200 \cdot 63 = 12600$$

Εφαρμογή 3

Να βρεθεί ο συντελεστής του $\alpha^3\beta^4\gamma^5$ στο ανάπτυγμα του $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^6$.

Λύση

Θα γράψουμε αρχικά :

$$\alpha^3\beta^4\gamma^5 = (\alpha\beta)^x (\beta\gamma)^y (\gamma\alpha)^z = \alpha^{x+z}\beta^{x+y}\gamma^{y+z}$$

Πρέπει λοιπόν :

$$(\Sigma): \begin{cases} x + z = 3 \\ x + y = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

Οι σχέσεις αυτές με πρόσθεση δίνουν $2(x + y + z) = 12 \Leftrightarrow x + y + z = 6$

Από αυτήν αφαιρούμε τις εξισώσεις του συστήματος και παίρνουμε :

$$y = 6 - 3 = 3, \quad x = 6 - 4 = 2, \quad x = 6 - 5 = 1$$

Είναι λοιπόν : $\alpha^3\beta^4\gamma^5 = (\alpha\beta)^1(\beta\gamma)^3(\gamma\alpha)^2$, οπότε ψάχνουμε τον συντελεστή του $(\alpha\beta)^1(\beta\gamma)^3(\gamma\alpha)^2$ στο

ανάπτυγμα $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^6$. Αυτός όμως είναι ο αριθμός $\frac{6!}{1!3!2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 60$.

Άλλος τρόπος

Επειδή

$$(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^6 = (\alpha\beta\gamma)^6 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right)^6,$$

αρκεί να βρούμε τον συντελεστή του $\alpha^{6-3}\beta^{6-4}\gamma^{6-5} = \alpha^3\beta^2\gamma^1$. Αλλά αυτός ο συντελεστής είναι ο :

$$\frac{6!}{3!2!1!} = \frac{3!4 \cdot 5 \cdot 6}{6 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 60 \quad \blacksquare$$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 4

Προσθήκη 5 - Σελίδες (29-39)**23-11-2025**

Στον κορμό του βιβλίου έχουμε αναφέρει την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού (A-EA) για δύο και τρία σύνολα.

Δίνουμε σε αυτή την προσθήκη δύο εφαρμογές για δύο σύνολα, που θα καταστήσουν την Αρχή αυτή πιο κατανοητή, δίνοντας συγχρόνως και έναν διδακτικό τρόπο για να παρουσιαστούν σε μαθητές.

Αναγραμματισμοί και αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού**Άσκηση 1**

Δίνεται η λέξη **ΤΡΑΠΕΖΙ**, που αποτελείται από τα γράμματα T, P, A, Π, E, Z, I. Να βρεθεί πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης αυτής υπάρχουν, στους οποίους δεν εμφανίζονται τα μπλοκ (συνεχόμενα γράμματα) ΤΠΠ και ΕΑΡ.

Λύση:

Πριν προχωρήσουμε στη λύση να θυμίσουμε ότι το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A το συμβολίζουμε είτε με $N(A)$ είτε με $|A|$.

1. Συνολικοί αναγραμματισμοί χωρίς κανέναν περιορισμό.

Η λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ έχει 7 διαφορετικά γράμματα (T, P, A, Π, E, Z, I). Άρα ο συνολικός αριθμός των αναγραμματισμών της είναι:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

2. Ορισμός των συνόλων A και B.

Θεωρούμε τα εξής σύνολα αναγραμματισμών της λέξης **ΤΡΑΠΕΖΙ**:

A: Το σύνολο των αναγραμματισμών, στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΤΠΠ.

B: Το σύνολο των αναγραμματισμών, στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΕΑΡ.

Εμείς θέλουμε τους αναγραμματισμούς, στους οποίους δεν εμφανίζεται ούτε το ΤΠΠ ούτε το ΕΑΡ, δηλαδή το πλήθος των αναγραμματισμών που ΔΕΝ ανήκουν στο $A \cup B$.

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$N = \text{Συνολικοί αναγραμματισμοί} - |A \cup B| = 7! - |A \cup B|.$$

Με την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού παίρνουμε :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

3. Υπολογισμός του $|A|$ (αναγραμματισμοί με μπλοκ ΤΙΠ).

Θεωρούμε το μπλοκ ΤΙΠ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση», σαν ένα καινούργιο γράμμα X.

Τότε τα γράμματα/αντικείμενα που πρέπει να διατάξουμε είναι:

$$X = (\text{ΤΙΠ}), P, A, E, Z, I.$$

Συνολικά έχουμε 5 διαφορετικά αντικείμενα, τα οποία μπορούν να διαταχθούν με $5!$ τρόπους. Άρα:

$$|A| = 5! = 120.$$

4. Υπολογισμός του $|B|$ (αναγραμματισμοί με μπλοκ ΕΑΡ).

Αντίστοιχα, θεωρούμε το μπλοκ ΕΑΡ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση», δηλαδή ένα καινούργιο εικονικό γράμμα Y.

Τότε τα γράμματα/αντικείμενα που πρέπει να διατάξουμε είναι:

$$Y = (\text{ΕΑΡ}), T, P, \Pi, Z, I.$$

Και εδώ έχουμε 5 διαφορετικά αντικείμενα, οπότε ο αριθμός των διατάξεών τους είναι $5!$.

Συνεπώς:

$$|B| = 5! = 120.$$

5. Υπολογισμός του $|A \cap B|$ (αναγραμματισμοί με ΤΙΠ ΚΑΙ ΕΑΡ).

Τώρα θέλουμε τους αναγραμματισμούς στους οποίους εμφανίζονται ταυτόχρονα τα μπλοκ ΤΙΠ και ΕΑΡ.

Παρατηρούμε ότι τα δύο μπλοκ δεν έχουν κοινό γράμμα, άρα δεν μπορούν να επικαλύπτονται.

Τα θεωρούμε λοιπόν ως δύο ενιαίες «υπέρ-θέσεις»:

$$X = (\text{ΤΙΠ}), Y = (\text{ΕΑΡ}).$$

Μαζί με τα υπόλοιπα γράμματα ΤΡΑΠΕΖΙ, μετά την αφαίρεση των γραμμάτων T, I, Π και E, A, P, απομένει μόνο το γράμμα Z.

Άρα τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι:

$$X = (\text{ΤΙΠ}), Y = (\text{ΕΑΡ}), Z.$$

Συνολικά έχουμε 3 διαφορετικά αντικείμενα και συνεπώς $3!$ μεταθέσεις (διατάξεις). Επομένως $|A \cap B| = 3! = 6$.

6. Τελικός υπολογισμός του ζητούμενου πλήθους.

Από την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού έχουμε:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 120 + 120 - 6 = 234.$$

Οι αναγραμματισμοί που ΔΕΝ περιέχουν ούτε το μπλοκ ΤΙΠ ούτε το μπλοκ ΕΑΡ είναι:

$$N = 7! - |A \cup B| = 5040 - 234 = 4806 \blacksquare$$

Άσκηση 2(1^η Παραλλαγή)

Δίνεται η λέξη **ΤΡΑΠΕΖΙ**, που αποτελείται από τα γράμματα T, P, A, Π, E, Z, I .

Να βρεθεί πόσοι αναγραμματισμοί (διαφορετικές μεταθέσεις των 7 γραμμάτων) της λέξης υπάρχουν, στους οποίους δεν εμφανίζονται τα μπλοκ ΠΑΤ και ΤΡΙ.

Λύση:**1. Συνολικοί αναγραμματισμοί χωρίς κανέναν περιορισμό.**

Η λέξη **ΤΡΑΠΕΖΙ** έχει 7 διαφορετικά γράμματα (T, P, A, Π, E, Z, I). Άρα ο συνολικός αριθμός των αναγραμματισμών της είναι:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

2. Ορισμός των συνόλων A και B.

Θεωρούμε τα εξής σύνολα αναγραμματισμών της λέξης **ΤΡΑΠΕΖΙ**:

A: Το σύνολο των αναγραμματισμών στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΠΑΤ ως συνεχόμενα γράμματα.

B: Το σύνολο των αναγραμματισμών στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΤΡΙ ως συνεχόμενα γράμματα.

Εμείς θέλουμε τους αναγραμματισμούς, στους οποίους δεν εμφανίζεται ούτε το ΠΑΤ ούτε το ΤΡΙ, δηλαδή το πλήθος των αναγραμματισμών που ΔΕΝ ανήκουν στο $A \cup B$.

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$N = \text{Συνολικοί αναγραμματισμοί} - |A \cup B| = 7! - |A \cup B|.$$

Με την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού παίρνουμε :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

3. Υπολογισμός του |A| (αναγραμματισμοί με μπλοκ ΠΑΤ).

Θεωρούμε το μπλοκ ΠΑΤ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση», σαν ένα καινούργιο γράμμα X.

Τότε τα γράμματα/αντικείμενα που πρέπει να διατάξουμε είναι:

$$X = (\text{ΠΑΤ}), P, E, Z, I.$$

Συνολικά έχουμε 5 διαφορετικά αντικείμενα, τα οποία μπορούν να διαταχθούν με $5!$ τρόπους.

Άρα:

$$|A| = 5! = 120.$$

4. Υπολογισμός του |B| (αναγραμματισμοί με μπλοκ ΤΡΙ).

Αντίστοιχα, θεωρούμε το μπλοκ ΤΡΙ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση», δηλαδή ένα καινούργιο εικονικό γράμμα Y.

Τότε τα γράμματα/αντικείμενα που πρέπει να διατάξουμε είναι:

$$Y = (TPI), \Pi, A, E, Z.$$

Και εδώ έχουμε 5 διαφορετικά αντικείμενα, άρα ο αριθμός των διατάξεών τους είναι 5!.

Συνεπώς $|B| = 5! = 120$.

5. Υπολογισμός του $|A \cap B|$ (αναγραμματισμοί με ΠΑΤ ΚΑΙ ΤΡΙ).

Τώρα θέλουμε τους αναγραμματισμούς στους οποίους εμφανίζονται ταυτόχρονα τα μπλοκ ΠΑΤ και ΤΡΙ. Γράφουμε τα δύο μπλοκ:

$$\text{ΠΑΤ: } \Pi - A - T \quad \text{και} \quad \text{ΤΡΙ: } T - P - I$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο μπλοκ έχουν κοινό γράμμα μόνο το T.

Επειδή στη λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ το γράμμα T εμφανίζεται μόνο μία φορά, τα δύο μπλοκ, αν συνυπάρχουν, πρέπει να μοιράζονται αυτό το ίδιο T.

Στο ΠΑΤ το T βρίσκεται στο τέλος του μπλοκ, ενώ στο ΤΡΙ το T βρίσκεται στην αρχή του μπλοκ. Άρα για να υπάρχουν και τα δύο μπλοκ ταυτόχρονα, πρέπει να «κολλούν» πάνω στο T, ως εξής:

$$\text{ΠΑΤΡΙ} = \Pi - A - T - P - I.$$

Ελέγχουμε ότι πράγματι:

- Στις θέσεις 1-3 έχουμε ΠΑΤ,
- Στις θέσεις 3-5 έχουμε ΤΡΙ.

Άρα κάθε αναγραμματισμός που ανήκει στο $A \cap B$ περιέχει υποχρεωτικά το μπλοκ ΠΑΤΡΙ (ως συνεχόμενα γράμματα).

Θεωρούμε λοιπόν το ΠΑΤΡΙ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση» Z, ένα εικονικό δηλαδή γράμμα Z. Τα γράμματα της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ είναι T, P, A, Π, E, Z, I.

Για το μπλοκ ΠΑΤΡΙ χρησιμοποιήσαμε τα γράμματα Π, A, T, P, I, οπότε απομένουν τα γράμματα E και Z. Άρα τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι:

$$Z = (\text{ΠΑΤΡΙ}), E, Z.$$

Συνολικά 3 διαφορετικά αντικείμενα δίνουν 3! Μεταθέσεις. Επομένως $|A \cap B| = 3! = 6$.

6. Τελικός υπολογισμός του ζητούμενου πλήθους.

Από την αρχή εγκλεισμού-Αποκλεισμού έχουμε:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 120 + 120 - 6 = 234.$$

Οι αναγραμματισμοί που ΔΕΝ περιέχουν ούτε το μπλοκ ΠΑΤ ούτε το μπλοκ ΤΡΙ είναι:

$$N = 7! - |A \cup B| = 5040 - 234 = 4806.$$

Ο ζητούμενος λοιπόν αριθμός αναγραμματισμών της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ, στους οποίους δεν εμφανίζονται τα μπλοκ ΠΑΤ και ΤΡΙ είναι $N = 4806$ ■

Τέλος, ας δούμε και μια εφαρμογή της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού για τρία σύνολα.

Άσκηση 3(2^η Παραλλαγή)

Δίνεται η λέξη **ΤΡΑΠΕΖΙ**, που αποτελείται από τα γράμματα T, P, A, Π, E, Z, I (όλα διαφορετικά).

Να βρεθεί πόσοι αναγραμματισμοί (διαφορετικές μεταθέσεις των 7 γραμμάτων) υπάρχουν, στους οποίους δεν εμφανίζονται τα μπλοκ (συνεχόμενα γράμματα) ΤΑ, ΑΤΙ και ΠΕΤ.

Λύση:

1. Συνολικοί αναγραμματισμοί χωρίς κανέναν περιορισμό.

Η λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ έχει 7 διαφορετικά γράμματα (T, P, A, Π, E, Z, I). Άρα ο συνολικός αριθμός των αναγραμματισμών της είναι:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

2. Ορισμός των συνόλων A, B και C.

Θεωρούμε τα εξής σύνολα αναγραμματισμών της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ:

A: Το σύνολο των αναγραμματισμών στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΤΑ ως συνεχόμενα γράμματα.

B: Το σύνολο των αναγραμματισμών στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΑΤΙ ως συνεχόμενα γράμματα.

C: Το σύνολο των αναγραμματισμών στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΠΕΤ ως συνεχόμενα γράμματα.

Εμείς θέλουμε τους αναγραμματισμούς, στους οποίους δεν εμφανίζεται κανένα από τα μπλοκ ΤΑ, ΑΤΙ, ΠΕΤ, δηλαδή το πλήθος των αναγραμματισμών που ΔΕΝ ανήκουν στο

$$A \cup B \cup C.$$

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$N = \text{Συνολικοί αναγραμματισμοί} - |A \cup B \cup C| = 7! - |A \cup B \cup C|.$$

Με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για τρία σύνολα έχουμε:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

3. Υπολογισμός των |A|, |B|, |C|.

- Για το σύνολο A (μπλοκ ΤΑ):

Θεωρούμε το ΤΑ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση» X. Το μπλοκ ΤΑ χρησιμοποιεί τα γράμματα T και A, οπότε απομένουν τα γράμματα P, Π, E, Z, I.

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $X = (TA), P, \Pi, E, Z, I \rightarrow$ συνολικά 6 διαφορετικά αντικείμενα. Άρα:

$$|A| = 6! = 720.$$

- Για το σύνολο B (μπλοκ ATI):

Θεωρούμε το ATI ως μία ενιαία «υπέρ-θέση» Y. Το μπλοκ ATI χρησιμοποιεί τα γράμματα A, T και I, οπότε απομένουν τα γράμματα P, Π, E, Z.

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $Y = (ATI), P, \Pi, E, Z \rightarrow 5$ διαφορετικά αντικείμενα.

Άρα:

$$|B| = 5! = 120.$$

- Για το σύνολο C (μπλοκ PET):

Θεωρούμε το PET ως μία ενιαία «υπέρ-θέση» Z. Το μπλοκ PET χρησιμοποιεί τα γράμματα Π, E και T, οπότε απομένουν τα γράμματα P, A, Z, I.

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $Z = (PET), P, A, Z, I \rightarrow 5$ διαφορετικά αντικείμενα.

Άρα:

$$|C| = 5! = 120.$$

4. Υπολογισμός των $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$.

- Τομή $A \cap B$ (αναγραμματισμοί με TA και ATI):

Τα μπλοκ TA (T-A) και ATI (A-T-I) θα απαιτούσαν τουλάχιστον δύο φορές τα γράμματα T και A για να εμφανιστούν χωριστά, κάτι που δεν ισχύει. Αν προσπαθήσουμε να τα επικαλύψουμε, θα έπρεπε να έχουμε μια διάταξη τύπου TATI, στην οποία το T εμφανίζεται δύο φορές. Επομένως δεν υπάρχει αναγραμματισμός που να περιέχει και τα δύο μπλοκ.

Άρα:

$$|A \cap B| = 0.$$

- Τομή $B \cap C$ (αναγραμματισμοί με ATI και PET):

Τα μπλοκ ATI (A-T-I) και PET (Π-E-T) μοιράζονται μόνο το γράμμα T, το οποίο υπάρχει μία φορά στη λέξη. Για να εμφανιστούν και τα δύο, θα χρειαζόταν είτε δεύτερο T είτε κάποια συμβατή επικάλυψη, η οποία όμως δεν είναι δυνατή λόγω των θέσεων του T στα δύο μπλοκ (2η θέση στο ATI, 3η θέση στο PET). Άρα:

$$|B \cap C| = 0.$$

- Τομή $A \cap C$ (αναγραμματισμοί με TA και PET):

Τα μπλοκ TA (T-A) και PET (Π-E-T) μοιράζονται το γράμμα T. Μπορούν να επικαλυφθούν στο T, έτσι ώστε να σχηματίζουν το μπλοκ PETA = Π-E-T-A. Πράγματι:

- Στις θέσεις 1–3 του ΠΕΤΑ έχουμε ΠΕΤ,
- Στις θέσεις 3–4 του ΠΕΤΑ έχουμε ΤΑ.

Άρα κάθε αναγραμματισμός που ανήκει στο $A \cap C$ περιέχει υποχρεωτικά το μπλοκ **ΠΕΤΑ**.

Θεωρούμε λοιπόν το ΠΕΤΑ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση», ένα εικονικό γράμμα, W .

Το ΠΕΤΑ χρησιμοποιεί τα γράμματα Π, Ε, Τ, Α, οπότε από τα γράμματα της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ απομένουν τα γράμματα Ρ, Ζ, Ι.

Τα αντικείμενα που μετατίθενται είναι: $W = (\text{ΠΕΤΑ})$, Ρ, Ζ, Ι, δηλαδή 4 διαφορετικά αντικείμενα. Άρα:

$$|A \cap C| = 4! = 24.$$

5. Υπολογισμός της τριπλής τομής $|A \cap B \cap C|$.

Για να ανήκει ένας αναγραμματισμός στο $A \cap B \cap C$, θα έπρεπε να περιέχει ταυτόχρονα τα μπλοκ ΤΑ, ΑΤΙ και ΠΕΤ.

Όμως ήδη από τα παραπάνω είδαμε ότι δεν υπάρχει αναγραμματισμός που να περιέχει ταυτόχρονα ΤΑ και ΑΤΙ ($|A \cap B| = 0$). Άρα δεν μπορεί να υπάρξει και αναγραμματισμός που να περιέχει και τα τρία μπλοκ. Επομένως:

$$|A \cap B \cap C| = 0.$$

6. Τελικός υπολογισμός του ζητούμενου πλήθους.

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για τα τρία σύνολα A, B, C έχουμε:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 720 + 120 + 120 - 0 - 24 - 0 + 0 = 936. \end{aligned}$$

Οι αναγραμματισμοί που ΔΕΝ περιέχουν κανένα από τα μπλοκ ΤΑ, ΑΤΙ, ΠΕΤ είναι:

$$N = 7! - |A \cup B \cup C| = 5040 - 936 = 4104.$$

Συμπέρασμα

Ο ζητούμενος αριθμός αναγραμματισμών της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ, στους οποίους δηλαδή δεν εμφανίζονται τα μπλοκ ΤΑ, ΑΤΙ και ΠΕΤ είναι $N = 4104$ ■

Άσκηση 4(3^η Παραλλαγή- Για εξάσκηση)

Δίνεται η λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ, που αποτελείται από τα 7 διαφορετικά γράμματα Τ, Ρ, Α, Π, Ε, Ζ, Ι. Θεωρούμε τα εξής μπλοκ (συνεχόμενα γράμματα):

- μπλοκ Α: ΤΡΑ
- μπλοκ Β: ΡΑΠ
- μπλοκ Γ: ΑΠΕ

Έστω Α, Β, Γ τα σύνολα των αναγραμματισμών της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ στους οποίους εμφανίζεται αντίστοιχα το μπλοκ ΤΡΑ, ΡΑΠ, ΑΠΕ (τουλάχιστον μία φορά).

(α) Να βρεθούν τα πλήθη $|A|$, $|B|$, $|C|$.

(β) Να βρεθούν τα πλήθη $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$.

(γ) Να βρεθεί το πλήθος $|A \cap B \cap C|$.

(δ) Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών, στους οποίους δεν εμφανίζεται κανένα από τα μπλοκ ΤΡΑ, ΡΑΠ, ΑΠΕ.

Λύση (Συγκεντρωτικά)**Συνολικοί αναγραμματισμοί της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ.**

Η λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ έχει 7 διαφορετικά γράμματα (Τ, Ρ, Α, Π, Ε, Ζ, Ι). Άρα ο συνολικός αριθμός των αναγραμματισμών της είναι:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

Υπολογισμός των $|A|$, $|B|$, $|C|$.

Θεωρούμε κάθε μπλοκ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση», ένα εικονικό γράμμα με άλλα λόγια.

- Για το σύνολο Α (μπλοκ ΤΡΑ):

Το μπλοκ ΤΡΑ χρησιμοποιεί τα γράμματα Τ, Ρ, Α. Αν το θεωρήσουμε ως ένα νέο γράμμα $X = (ΤΡΑ)$, τα υπόλοιπα γράμματα της λέξης είναι Π, Ε, Ζ, Ι.

Άρα τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: X, Π, E, Z, I και έτσι έχουμε συνολικά 5 διαφορετικά αντικείμενα. Επομένως:

$$|A| = 5! = 120.$$

- Για το σύνολο Β (μπλοκ ΡΑΠ):

Το μπλοκ ΡΑΠ χρησιμοποιεί τα γράμματα Ρ, Α, Π. Θεωρούμε $Y = (ΡΑΠ)$. Απομένουν τα γράμματα Τ, Ε, Ζ, Ι.

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: Y, T, E, Z, I δηλαδή 5 διαφορετικά αντικείμενα. Άρα:

$$|B| = 5! = 120.$$

- Για το σύνολο C (μπλοκ ΑΠΕ):

Το μπλοκ ΑΠΕ χρησιμοποιεί τα γράμματα Α, Π, Ε. Θεωρούμε $Z = (ΑΠΕ)$. Απομένουν τα γράμματα Τ, Ρ, Ζ, Ι.

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $Z, T, P, Z, I \rightarrow 5$ διαφορετικά αντικείμενα.

Άρα:

$$|C| = 5! = 120.$$

Υπολογισμός των τομών $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$.

Για να βρούμε τα πλήθη των τομών, ψάχνουμε πώς μπορούν να «επικαλυφθούν» τα αντίστοιχα μπλοκ.

- Τομή $A \cap B$ (αναγραμματισμοί με ΤΡΑ και ΡΑΠ):

Τα μπλοκ είναι ΤΡΑ (Τ-Ρ-Α) και ΡΑΠ (Ρ-Α-Π). Μοιράζονται τα γράμματα Ρ και Α.

Επειδή στη λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ κάθε γράμμα εμφανίζεται μία φορά, τα δύο μπλοκ, αν συνυπάρχουν, πρέπει να μοιράζονται αυτά τα ίδια γράμματα. Η μόνη δυνατή επικάλυψη είναι:

$$\text{ΤΡΑΠ} = \text{T} - \text{P} - \text{A} - \text{Π},$$

όπου:

- στις θέσεις 1–3 έχουμε ΤΡΑ,
- στις θέσεις 2–4 έχουμε ΡΑΠ.

Άρα κάθε αναγραμματισμός του $A \cap B$ περιέχει το μπλοκ ΤΡΑΠ.

Θεωρούμε το ΤΡΑΠ ως μία «υπέρ-θέση» W. Το ΤΡΑΠ χρησιμοποιεί τα γράμματα Τ, Ρ, Α, Π, οπότε από τα γράμματα της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ απομένουν τα Ε, Ζ, Ι.

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $W = (\text{ΤΡΑΠ}), E, Z, I \rightarrow 4$ διαφορετικά αντικείμενα.

Άρα:

$$|A \cap B| = 4! = 24.$$

- Τομή $A \cap C$ (αναγραμματισμοί με ΤΡΑ και ΑΠΕ):

Τα μπλοκ είναι ΤΡΑ (Τ-Ρ-Α) και ΑΠΕ (Α-Π-Ε). Μοιράζονται το γράμμα Α.

Για να συνυπάρχουν με κοινό το γράμμα Α, η φυσική επικάλυψη είναι:

$$\text{ΤΡΑΠΕ} = \text{T} - \text{P} - \text{A} - \text{Π} - \text{Ε},$$

όπου:

- Στις θέσεις 1–3 έχουμε ΤΡΑ,
- Στις θέσεις 3–5 έχουμε ΑΠΕ.

Άρα κάθε αναγραμματισμός του $A \cap C$ περιέχει το μπλοκ ΤΡΑΠΕ.

Θεωρούμε το ΤΡΑΠΕ ως μία «υπέρ-θέση» U . Το ΤΡΑΠΕ χρησιμοποιεί τα γράμματα T, P, A, Π, E , οπότε από τα γράμματα της λέξης απομένουν τα Z, I .

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $U = (\text{ΤΡΑΠΕ}), Z, I \rightarrow 3$ διαφορετικά αντικείμενα.

Άρα:

$$|A \cap C| = 3! = 6.$$

- Τομή $B \cap C$ (αναγραμματισμοί με ΡΑΠ και ΑΠΕ):

Τα μπλοκ είναι ΡΑΠ ($P-A-\Pi$) και ΑΠΕ ($A-\Pi-E$). Μοιράζονται τα γράμματα A και Π .

Η επικάλυψη που χρησιμοποιεί τα ίδια A και Π είναι:

$$\text{ΡΑΠΕ} = P - A - \Pi - E,$$

όπου:

- στις θέσεις 1–3 έχουμε ΡΑΠ,
- στις θέσεις 2–4 έχουμε ΑΠΕ.

Άρα κάθε αναγραμματισμός του $B \cap C$ περιέχει το μπλοκ ΡΑΠΕ.

Θεωρούμε το ΡΑΠΕ ως μία «υπέρ-θέση» V . Το ΡΑΠΕ χρησιμοποιεί τα γράμματα P, A, Π, E , οπότε από τα γράμματα της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ απομένουν τα T, Z, I .

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $V = (\text{ΡΑΠΕ}), T, Z, I \rightarrow 4$ διαφορετικά αντικείμενα.

Άρα:

$$|B \cap C| = 4! = 24.$$

Υπολογισμός της τριπλής τομής $|A \cap B \cap C|$.

Για να ανήκει ένας αναγραμματισμός στο $A \cap B \cap C$, πρέπει να περιέχει ταυτόχρονα τα μπλοκ ΤΡΑ, ΡΑΠ και ΑΠΕ.

Από τον υπολογισμό των τομών $A \cap C$ είδαμε ότι κάθε αναγραμματισμός με ΤΡΑ και ΑΠΕ περιέχει το μπλοκ ΤΡΑΠΕ.

Παρατηρούμε ότι το ΤΡΑΠΕ περιέχει και το μπλοκ ΡΑΠ:

$$\text{ΤΡΑΠΕ} = T - P - A - \Pi - E,$$

με ΡΑΠ στις θέσεις 2–4.

Άρα κάθε αναγραμματισμός του $A \cap C$ αυτόματα ανήκει και στο B . Επομένως η τριπλή τομή $A \cap B \cap C$ συμπίπτει με το $A \cap C$.

Έτσι:

$$|A \cap B \cap C| = |A \cap C| = 3! = 6.$$

Υπολογισμός του $|A \cup B \cup C|$ και του πλήθους χωρίς κανένα μπλοκ.

Από την αρχή E-A για τρία σύνολα έχουμε:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές:

- ♦ $|A| = |B| = |C| = 120$,
- ♦ $|A \cap B| = 24$, $|A \cap C| = 6$, $|B \cap C| = 24$, $|A \cap B \cap C| = 6$.

Έτσι:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= 120 + 120 + 120 - 24 - 6 - 24 + 6 \\ &= 360 - 54 + 6 = 360 - 48 = 312. \end{aligned}$$

Οι αναγραμματισμοί στους οποίους ΔΕΝ εμφανίζεται κανένα από τα μπλοκ ΤΡΑ, ΡΑΠ, ΑΠΕ είναι το συμπλήρωμα του $A \cup B \cup C$ στο σύνολο όλων των αναγραμματισμών:

$$N = 7! - |A \cup B \cup C| = 5040 - 312 = 4728.$$

Συνοψίζοντας:

- ♦ $|A| = |B| = |C| = 120$,
- ♦ $|A \cap B| = 24$, $|A \cap C| = 6$, $|B \cap C| = 24$,
- ♦ $|A \cap B \cap C| = 6$,

και οι αναγραμματισμοί της ΤΡΑΠΙΕΖΙ χωρίς κανένα από τα μπλοκ ΤΡΑ, ΡΑΠ, ΑΠΕ είναι 4728.