

Μπάμπης Στεργίου

Στοχαστικά Μαθηματικά

Α. Συνδυαστική

Λύσεις των ασκήσεων

Ενότητα 5 - Ενότητα 6 - Ενότητα 7

2^η ΕΚΔΟΣΗ

Ενότητα 5

Πρόβλημα 5.1 (Αρχές συνδυαστικής)

Ας ονομάσουμε $\overline{xy} = 10x + y$ έναν από τους αριθμούς αυτούς. Προφανώς $x \neq 0$.

Στην τελευταία θέση y , των μονάδων, μπορούμε να έχουμε μόνο ένα από τα ψηφία 0, 2, 4, 6, 8.

Θα εφαρμόσουμε αρχικά την **προσθετική αρχή**, με κριτήριο αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0 ή όχι. Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

(α) Το τελευταίο ψηφίο είναι 0, δηλαδή $y = 0$. Για το x έχουμε 9 δυνατότητες, όσα είναι τα ψηφία 1, 2, 3, ..., 8, 9.

Για αυτή την περίπτωση έχουμε 9 αριθμούς.

(β) Το τελευταίο ψηφίο δεν είναι 0, δηλαδή $y \neq 0$.

Για το y έχουμε τώρα 4 δυνατότητες: 2, 4, 6, 8.

Για τη θέση του x έχουμε $10 - 1 - 1 = 8$ δυνατότητες, διότι εξαιρείται το 0 και προφανώς το άρτιο ψηφίο που χρησιμοποιήσαμε για τη θέση του y .

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση αυτή σχηματίζονται $4 \cdot 8 = 32$ αριθμοί.

Τέλος, από την προσθετική αρχή προκύπτει ότι το πλήθος των ζητούμενων τριψήφων άρτιων αριθμών με διαφορετικά ψηφία είναι:

$$9 + 32 = 41$$

Άλλος τρόπος

Ας εφαρμόσουμε την **προσθετική αρχή** με κριτήριο αν το πρώτο ψηφίο x είναι περιττός αριθμός ή όχι.

(α) Έστω ότι το x είναι περιττός.

Για τη θέση αυτή έχουμε 5 δυνατότητες: 1, 3, 5, 7, 9.

Για τη θέση y των μονάδων έχουμε επίσης 5 δυνατότητες, όσα είναι και τα άρτια ψηφία.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση σχηματίζονται $5 \cdot 5 = 25$ αριθμοί.

(β) Έστω ότι το x είναι άρτιος.

Το x δεν μπορεί να είναι 0, οπότε έχουμε 4 δυνατότητες: 2, 4, 6, 8.

Για τη θέση των μονάδων έχουμε τα άρτια ψηφία, εκτός βέβαια από το άρτιο ψηφίο που διαθέσαμε για το x . Με άλλα λόγια και για το y έχουμε 4 δυνατότητες.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση σχηματίζονται $4 \cdot 4 = 16$ αριθμοί.

Τέλος, από την προσθετική αρχή προκύπτει ότι το πλήθος των ζητούμενων διψήφων άρτιων αριθ-

μών με διαφορετικά ψηφία είναι:

$$25 + 16 = 41.$$

Πρόβλημα 5.2 (Αρχές συνδυαστικής στην εύρεση πλήθους αριθμών)

Ας ονομάσουμε $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ έναν από τους αριθμούς αυτούς. Προφανώς $x \neq 0$.

Στην τελευταία θέση z , των μονάδων, μπορούμε να έχουμε μόνο ένα από τα ψηφία 0, 2, 4, 6, 8.

Θα εφαρμόσουμε αρχικά την **προσθετική αρχή**, με κριτήριο αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0 ή όχι.

Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

(α) Το τελευταίο ψηφίο είναι 0, δηλαδή $z = 0$. Για το x έχουμε 9 δυνατότητες, όσα είναι τα ψηφία 1, 2, 3, ..., 8, 9.

Για το y έχουμε $10 - 1 - 1 = 8$ δυνατότητες, αφού εξαιρείται το 0 που έχει χρησιμοποιηθεί στη θέση z των μονάδων αλλά και το ψηφίο που διαθέσαμε για τη θέση x των εκατοντάδων.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή, για αυτή την περίπτωση έχουμε $8 \cdot 9 = 72$ αριθμούς.

(β) Το τελευταίο ψηφίο δεν είναι 0, δηλαδή $z \neq 0$.

Για το z έχουμε τώρα 4 δυνατότητες: 2, 4, 6, 8.

Για τη θέση του x έχουμε $10 - 1 - 1 = 8$ δυνατότητες, διότι εξαιρείται το 0 και προφανώς το άρτιο ψηφίο που χρησιμοποιήσαμε για τη θέση του z .

Για το y έχουμε $10 - 1 - 1 = 8$ δυνατότητες, αφού έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει δύο ψηφία για τις θέσεις των x, z . Στη θέση αυτή μπορεί να είναι και το ψηφίο 0.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση αυτή σχηματίζονται $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$ αριθμοί.

Τέλος, από την προσθετική αρχή προκύπτει ότι το πλήθος των ζητούμενων τριψήφιων άρτιων αριθμών με διαφορετικά ψηφία είναι:

$$72 + 256 = 328.$$

Άλλος τρόπος

Ας εφαρμόσουμε την **προσθετική αρχή** με κριτήριο αν το πρώτο ψηφίο x είναι περιττός αριθμός ή όχι.

$$\text{Είναι } \overline{xyz} = 100x + 10y + z$$

(α) Έστω ότι το x είναι περιττός.

Για τη θέση αυτή έχουμε 5 δυνατότητες, όσα είναι δηλαδή τα ψηφία: 1, 3, 5, 7, 9.

Για τη θέση z των μονάδων έχουμε επίσης 5 δυνατότητες, όσα είναι και τα άρτια ψηφία.

Για τη θέση y των δεκάδων έχουμε $10 - 1 - 1 = 8$ δυνατότητες, αφού πρέπει να εξαιρέσουμε τα δύο ψηφία που έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί για τις θέσεις x, z .

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση σχηματίζονται

$$5 \cdot 8 \cdot 5 = 200 \text{ αριθμοί.}$$

(β) Έστω ότι το x είναι άρτιος.

Το x δεν μπορεί να είναι 0, οπότε για τη θέση του έχουμε 4 δυνατότητες: 2, 4, 6, 8.

Για τη θέση των μονάδων έχουμε τα άρτια ψηφία, εκτός βέβαια από το άρτιο ψηφίο που διαθέσαμε για το x . Με άλλα λόγια και για το z έχουμε 4 δυνατότητες.

Για το ψηφίο y των δεκάδων έχουμε $10 - 1 - 1 = 8$ δυνατότητες, αφού πρέπει να εξαιρέσουμε τα δύο ψηφία που έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση σχηματίζονται

$$4 \cdot 8 \cdot 4 = 128 \text{ αριθμοί.}$$

Τέλος, από την προσθετική αρχή προκύπτει ότι το πλήθος των ζητούμενων διψήφίων άρτιων αριθμών με διαφορετικά ψηφία είναι:

$$200 + 128 = 328.$$

Άλλος τρόπος

Ζητάμε όλους τους τριψήφιους άρτιους αριθμούς χωρίς επανάληψη ψηφίου, δηλαδή αριθμούς της μορφής $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$.

Από το σύνολο των ψηφίων $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ παίρνουμε τρία διαφορετικά ψηφία και τα τοποθετούμε χωρίς επανάληψη ψηφία στις 3 θέσεις:

Των μονάδων, των δεκάδων και τον εκατοντάδων.

Στο τελευταίο ψηφίο βάζουμε άρτιο αριθμό.

Αυτό γίνεται συνολικά με $5 \cdot 9 \cdot 8 = 360$, αφού έχουμε 5 δυνατότητες για το z , 9 για το y και 8 για το ψηφίο x .

Μέσα όμως σε αυτούς τους 360 αριθμούς βρίσκονται και οι διψήφιοι, αφού για το x δεν έχουμε αποκλείσει το 0. Αυτούς τους αριθμούς θα τους εξαιρέσουμε.

Πρέπει λοιπόν να αποκλείσουμε από τους 360, όσους ξεκινούν με μηδενικό. Το πλήθος αυτών των αριθμών είναι $1 \cdot 4 \cdot 8 = 32$, αφού για το x έχουμε μία δυνατότητα, το 0, για το z 4 δυνατότητες μια και εξαιρέθηκε το 0 και για το y 8 δυνατότητες, αφού από τα 10 ψηφία τα δύο έχουμε ήδη χρησιμοποιηθεί για τις άλλες θέσεις.

Συνολικά λοιπόν έχουμε $360 - 32 = 328$ τριψήφιους άρτιους με διαφορετικά ψηφία.

Ευχαριστώ τους συναδέλφους Τάσο Ευαγόρου, Μιχάλη Αριστείδου, Αναστασία Ονουφρίου και Αλέξανδρο Μπάρο για τις λύσεις και τη συμμετοχή τους στην επαλήθευση των αποτελέσματος.

Πρόβλημα 5.3

(α) Το πλήθος των πενταψήφίων αριθμών, προκύπτει αν από όλους τους σχηματιζόμενους αριθμούς με τις 6 κάρτες αφαιρέσουμε εκείνους που αρχίζουν με 0. Επομένως το πλήθος τους είναι

$$6! - 5! = 5! (6 - 1) = 5 \cdot 5! = 600.$$

Άλλος τρόπος

Για τη θέση των δεκάδων χιλιάδων (ΔΧ) έχουμε 5 δυνατότητες, αφού εξαιρείται η κάρτα με το

ψηφίο 0. Στις υπόλοιπες θέσεις του αριθμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς επανάληψη καθεμιά από τις υπόλοιπες 5 κάρτες. Αυτό γίνεται με $5!$ τρόπους.

Θέσεις	5	4	3	2	1
Αξία	ΔΧ	Χ	Ε	Δ	Μ
Δυνατότητες	5	5	4	3	2

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι σχηματίζονται $5 \cdot 5!$ αριθμοί.

(β) Για να είναι ένας αριθμός πολλαπλάσιο του 5, πρέπει και αρκεί να τελειώνει σε 0 ή 5.

♦ Το πλήθος των πενταψήφιων αριθμών που σχηματίζονται με τις κάρτες και τελειώνουν σε 0 είναι

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$$

Πράγματι:

Στη θέση των μονάδων βάζουμε το 0 με έναν μόνον τρόπο. Στις άλλες 4 θέσεις μπορούν να μπουν οποιεσδήποτε 4 από τις υπόλοιπες 5 κάρτες. Αυτό γίνεται με $(5)_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ τρόπους. Επομένως σχηματίζονται $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ αριθμοί.

♦ Το πλήθος των πενταψήφιων αριθμών που σχηματίζονται με τις κάρτες και τελειώνουν σε 5 είναι

$$4 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 1 = 96$$

Πράγματι:

Στη θέση των μονάδων βάζουμε το 5 με έναν μόνον τρόπο. Στη θέση των ΔΧ μπορεί να μπει μία από τις 4 κάρτες, αφού εξαιρείται το 0. Στις υπόλοιπες τρεις θέσεις θα μπουν 3 από τις υπόλοιπες 4 κάρτες. Αυτό γίνεται με $(4)_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ τρόπους. Το πλήθος λοιπόν των πενταψήφιων αριθμών που τελειώνουν σε 5 είναι

$$4 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 1 = 96.$$

Από την προσθετική αρχή συμπεραίνουμε ότι με τα δεδομένα του προβλήματος υπάρχουν

$$120 + 96 = 216 \text{ πολλαπλάσια του 5.}$$

(γ) Για να διαιρείται ένας αριθμός με τον 3, πρέπει και αρκεί το άθροισμα των ψηφίων του να διαιρείται με το 3. Παρατηρούμε ότι $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

♦ Αν οι αριθμοί δεν περιέχουν το 0, τότε χρησιμοποιούνται οι πέντε κάρτες με ενδείξεις 1, 2, 3, 4, 5. Το πλήθος των αριθμών που σχηματίζονται είναι $5! = 120$ και όλοι διαιρούνται με το 3.

♦ Έστω τώρα ότι οι αριθμοί που σχηματίζονται περιέχουν το 0. Πρέπει τα υπόλοιπα 4 ψηφία να έχουν άθροισμα 3 ή 6 ή 9 ή 12. Με δοκιμές βλέπουμε ότι μόνο η περίπτωση $1 - 2 - 4 - 5$ ταιριάζει.

Με τα ψηφία αυτά και το 0 σχηματίζονται $5! - 4! = 4!(5 - 1) = 4 \cdot 4! = 96$ πενταψήφιοι αριθμοί.

Πράγματι, από τους $5!$ πενταψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται με τα ψηφία $0 - 1 - 2 - 4 - 5$, πρέπει να εξαιρέσουμε όσους αρχίζουν με 0. Το πλήθος όμως όσων αρχίζουν με 0 είναι $4!$

Φυσικά, μπορούμε και εδώ να εφαρμόσουμε την πολλαπλασιαστική αρχή:

Για το ψηφίο των ΔΧ έχουμε 4 δυνατότητες: 1–2–4–5. Για τις άλλες θέσεις έχουμε στη διάθεσή μας 4 ψηφία, ένα από τα οποία είναι τώρα και το 0. Οι άλλες λοιπόν θέσεις συμπληρώνονται με 4! τρόπους. Επομένως, θα πάρουμε $4 \cdot 4! = 96$ αριθμούς που περιέχουν το 0 και είναι πολλαπλάσια του 3.

Από την προσθετική αρχή συμπεραίνουμε ότι έχουμε συνολικά $120 + 93 = 216$ τέτοιους αριθμούς.

(δ) Το πλήθος των πενταψήφων αριθμών που σχηματίζονται με τις κάρτες και τελειώνουν σε 0 είναι

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$$

Πράγματι:

Στη θέση των μονάδων βάζουμε το 0 με έναν μόνο τρόπο. Στις άλλες 4 θέσεις μπορούν να μπουν οποιεσδήποτε 4 από τις υπόλοιπες 5 κάρτες. Αυτό γίνεται με $(5)_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ τρόπους. Επομένως σχηματίζονται $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ αριθμοί.

Θέσεις	5 ^η	4 ^η	3 ^η	2 ^η	1 ^η
Αξία	ΔΧ	Χ	Ε	Δ	Μ
Δυνατότητες	3	3	2	2	1

(ε) Περιττά ψηφία είναι τα 1, 3, 5 και με αυτά θα καλύψουμε στον πίνακα τις θέσεις 1–3–5, δηλαδή τις θέσεις τον Μ, Ε, ΔΧ.

Οι θέσεις λοιπόν αυτές καλύπτονται με περιττό ψηφίο με $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ τρόπους.

Για τις άλλες 2 θέσεις μένουν τρία ψηφία και αυτά τοποθετούνται με $3! = 6$ τρόπους. Συνολικά επομένως σχηματίζονται $6 \cdot 6 = 36$ τέτοιοι αριθμοί.

(στ) Ας ονομάσουμε για ευκολία

$$1(M) - 2(\Delta) - 3(E) - 4(X) - 5(\Delta X)$$

τις πέντε θέσεις, από δεξιά προς τα αριστερά. Για τις άρτιες θέσεις 2-4 έχουμε $3 \times 2 = 3$ δυνατότητες, αφού έχουμε 3 περιττά ψηφία. Πάμε τώρα στις πε-

Θέσεις	5 ^η	4 ^η	3 ^η	2 ^η	1 ^η
Αξία	ΔΧ	Χ	Ε	Δ	Μ
Δυνατότητες	2	3	2	2	1

ριττές θέσεις. Στη θέση 5 (ΔΧ) έχουμε 2 δυνατότητες, αφού από τα ψηφία 0, 2, 4 εξαιρείται το 0. Για τις άλλες δύο θέσεις έχουμε $2! = 2$ δυνατότητες, αφού έχουμε στη διάθεσή μας δύο ψηφία (με ένα από αυτά να είναι το 0). Από την πολλαπλασιαστική αρχή παίρνουμε $2 \times 2 = 4$ δυνατότητες για την κάλυψη των περιττών θέσεων με άρτιο ψηφίο και από την ίδια αρχή συνολικά θα έχουμε $4 \times 6 = 24$ τέτοιους αριθμούς.

Το ερώτημα το πρότεινε η συνάδελφος Αναστασία Ονουφρίου.

Πρόβλημα 5.4

Τα ψηφία είναι 10 και οι θέσεις είναι 9. Για να γράψουμε έναν 9-ψήφιο αριθμό, αυτός δεν πρέπει να ξεκινάει με 0. Επομένως, στη θέση του πρώτου ψηφίου δεν υπάρχει το 0 και έτσι για το ψηφίο αυτό έχουμε 9 δυνατότητες. Για τις υπόλοιπες 8 θέσεις έχουμε 10 δυνατότητες στην καθεμία, αφού επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων. Μπορούμε επομένως να σχηματίσουμε $9 \cdot 10^8$ αριθμούς με επανάληψη ψη-

φίων.

Άλλος τρόπος(για το πρώτο σκέλος)

Όλοι οι αριθμοί που σχηματίζονται με επανάληψη ψηφίων έχουν πλήθος 10^9 . Πρέπει να εξαιρέσουμε όμως εκείνους που αρχίζουν με 0. Το πλήθος αυτών των αριθμών είναι 10^8 , αφού για καθεμιά από τις υπόλοιπες 8 θέσεις έχουμε 10 δυνατότητες.

Επομένως, το πλήθος των 9-ψηφίων αριθμών είναι $10^9 - 10^8 = 10^8(10 - 1) = 9 \cdot 10^8$

Γυρίζουμε στο αρχικό πρόβλημα. Εμείς θέλουμε μία τουλάχιστον επανάληψη ψηφίου. Δεν μένει παρά από όλους τους 9-ψηφίους με επανάληψη ψηφίων να αφαιρέσουμε εκείνους που δεν έχουν καμία επανάληψη ψηφίου.

Θα απαριθμήσουμε το πλήθος αυτών των αριθμών. Για την πρώτη θέση έχουμε 9 δυνατότητες, αφού το 0 εξαιρείται. Οι υπόλοιπες 8 θέσεις θα καλυφτούν από 9 ψηφία, ανάμεσά τους και το 0, με $(9)_8 = 9!$ τρόπους. Οι 9-ψηφίου λοιπόν αριθμοί με διαφορετικά ψηφία έχουν πλήθος $9 \cdot 9!$

Επομένως, το ζητούμενο πλήθος αριθμών είναι $9 \cdot 10^8 - 9 \cdot 9! = 9 \cdot (10^8 - 9!)$

Πρόβλημα 5.5

Θα εφαρμόσουμε την πολλαπλασιαστική αρχή.

Έστω ότι $N_{10} = A \cup B$ με $A \cap B = \emptyset$ και $A, B \neq \emptyset$.

Θεωρούμε αρχικά το διατεταγμένο ζεύγος (A, B) χωρίς τον περιορισμό $A, B \neq \emptyset$.

Κάθε στοιχείο του N_{10} έχει δύο δυνατότητες: είτε ανήκει στο A είτε στο B. Επομένως αφού το N_{10} έχει 10 στοιχεία, από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε 2^{10} τέτοια ζεύγη. Όμως, σε δύο περιπτώσεις, σε αυτές δηλαδή που τα στοιχεία του N_{10} βρεθούν όλα στο A ή όλα στο B, το ένα από τα A και B είναι κενό. Πρέπει λοιπόν να εξαιρέσουμε τις δύο αυτές περιπτώσεις και έτσι μένουν $2^{10} - 2$.

Εκτός όμως αυτού, δεν μας ενδιαφέρει η σειρά, η διάταξη δηλαδή, των A και B, οπότε τον αριθμό $2^{10} - 2$ πρέπει να τον διαιρέσουμε με το $2! = 2$ που είναι το πλήθος των τρόπων (μεταθέσεων) που μπορούμε να βάλουμε δύο στοιχεία σε μια σειρά.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μπορούμε να γράψουμε το σύνολο N_{10} ως ένωση δύο μη κενών και ξένων υποσυνόλων A και B με $\frac{2^{10} - 2}{2} = 2^9 - 1 = 511$ τρόπους.

Σχόλιο

Αν το αρχικό σύνολο έχει n στοιχεία, τότε θα έχουμε συνολικά $2^{n-1} - 1$ τρόπους.

Πρόβλημα 5.6

(α) Αφού θέλουμε αριθμούς μεγαλύτερους από το 700000 το πρώτο ψηφίο πρέπει να είναι 7, 8 ή 9. Έχουμε λοιπόν 3 δυνατότητες για αυτό το ψηφίο.

EX	ΔX	X	E	Δ	M
3	6	6	6	6	6

Το υπόλοιπο μέρος του αριθμού σχηματίζεται με 6^5 τρόπους, διότι μένουν 5 θέσεις και για την καθεμία έχουμε 6 δυνατότητες.

Σχηματίζονται λοιπόν $3 \cdot 6^5$ αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι από το 700 000. Από αυτούς όμως πρέπει να εξαιρέσουμε τον 700 000 και έτσι το πλήθος των αριθμών που ζητάμε είναι $3 \cdot 6^5 - 1$.

(β) Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε επανάληψη ψηφίου. Για την πρώτη θέση έχουμε πάλι 3 δυνατότητες, όσα είναι και τα ψηφία 7, 8 και 9. Για τις υπόλοιπες 5 θέσεις έχουμε $5!$ δυνατότητες, αφού τα ψηφία είναι διαφορετικά.

EX	ΔX	X	E	Δ	M
3	5	4	3	2	1

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι έχουμε $3 \cdot 5!$ τέτοιους αριθμούς.

Πρόβλημα 5.7

(α) Οι αριθμοί που θέλουμε είναι όλοι τετραψήφιοι. Με πιο απλά λόγια θέλουμε όλους τους αριθμούς από το 1001 μέχρι τον 9999 που σχηματίζονται με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 5, 7.

X	E	Δ	M
5	6	6	6

Για τη θέση των X έχουμε 5 δυνατότητες: 1, 2, 3, 5, 7.

Για τις άλλες θέσεις έχουμε 6 δυνατότητες, αφού επιτρέπεται η επανάληψη των ψηφίων.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή σχηματίζονται $5 \cdot 6^3 = 5 \cdot 216 = 1080$ αριθμοί. Πρέπει όμως να εξαιρέσουμε τον αριθμό 1000 που είναι από τους σχηματιζόμενους αριθμούς. Επομένως το πλήθος των αριθμών που ζητάμε είναι $1080 - 1 = 1079$.

(β) Στο ερώτημα αυτό δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων. Για τη θέση X των χιλιάδων έχουμε πάλι 5, δυνατότητες, όσα και τα ψηφία 1, 2, 3, 5, 7.

Τις 3 άλλες θέσεις θα τις καταλάβουν χωρίς επανάληψη 3 ψηφία από τα υπόλοιπα 5. Αυτό γίνεται με $(5)_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, σχηματίζονται $5 \cdot 60 = 300$ τέτοιοι αριθμοί.

Ας σημειώσουμε ότι αφού τα ψηφία είναι διαφορετικά, το αριθμός 1000 δεν παρουσιάζεται τώρα ανάμεσα στους παραπάνω αριθμούς.

Σχόλιο

Αν θέλουμε το πλήθος των αριθμών που σχηματίζονται, με επανάληψη, από τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 5, 7 και είναι ανάμεσα στους αριθμούς 1000 και 100000, τότε θα παρατηρήσουμε ότι:

- έχουμε $5 \cdot 6^3$ τετραψήφιους αριθμούς,
- έχουμε $5 \cdot 6^4$ πενταψήφιους αριθμούς.

X	E	Δ	M
5	6	6	6

ΔX	X	E	Δ	M
5	6	6	6	6

Φυσικά θα εξαιρέσουμε τον 1000 και έτσι, σύμφωνα με την προσθετική αρχή το ζητούμενο πλήθος είναι: $5 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^4 - 1$.

Πρόβλημα 5.8

(α) Έχουμε επτά κάρτες, τις 1-1, 2-2, 3-3 και 4. Κάθε τοποθέτηση των καρτών σε μια σειρά δίνει και έναν αριθμό. Το πλήθος αυτών των αριθμών είναι:

$$\frac{7!}{2!2!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 21 \cdot 30 = 630$$

(β) Στον πίνακα βλέπουμε μια τυχαία τοποθέτηση των 7 καρτών.

Θέση	7 ^η	6 ^η	5 ^η	4 ^η	3 ^η	2 ^η	1 ^η
Ψηφία	1	2	1	2	3	4	3

Στις τέσσερις θέσεις 1, 3, 5, 7 θα τοποθετήσουμε τα τέσσερα ψηφία (κάρτες) 1,

1, 3, 3. Το πλήθος των αριθμών που σχηματίζονται είναι:

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

Σημειώνουμε ότι στον παρονομαστή το κάθε 2! δείχνει ότι έχουμε τοποθετήσει δύο φορές το ψηφίο 1 και δύο φορές το ψηφίο 3.

Στις τρεις άρτιες θέσεις θα μπουने τα ψηφία 2, 2, 4 με τυχαία σειρά. Αυτό γίνεται με

$$\frac{3!}{2!} = 3 \text{ τρόπους.}$$

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, σχηματίζονται συνολικά $6 \cdot 3 = 18$ τέτοιοι αριθμοί.

Πρόβλημα 5.9

Ας δούμε στον πίνακα μια τέτοια τοποθέτηση. Εδώ τοποθετήσαμε το ψηφίο 2 στις δύο πρώτες θέσεις, κάτι που συνολικά για δύο τυχαίες θέσεις γίνεται με $\binom{7}{2} = 21$ τρόπους. Ας δούμε τη λύση αναλυτικά με τα απαραίτητα βήματα.

Θέσεις	7	6	5	4	3	2	1
Δυνατότητες	$\binom{7}{2} = 21$	2	2	2	2	2	2

Επιλέγουμε αρχικά 2 από τις 7 θέσεις του αριθμού, κάτι που γίνεται με $\binom{7}{2} = 21$ τρόπους και τοπο-

θετούμε σε αυτές το ψηφίο 2, αναγκαστικά με έναν τρόπο. Για καθεμιά από τις υπόλοιπες 5 θέσεις έχουμε δύο επιλογές: ή το ψηφίο 1 ή το ψηφίο 3. Αυτό γίνεται με $2^5 = 32$ τρόπους.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, μπορούμε να σχηματίσουμε $21 \cdot 32 = 672$ αριθμούς.

Πρόβλημα 5.10

Τοποθετούμε αρχικά το ψηφίο 1. Αυτό γίνεται αν επιλέξουμε μία από τις 4 θέσεις του αριθμού, δη-

λαδή με 4 τρόπους.

Θέσεις	4	3	2	1
Δυνατότητες	4	7	6	5

Τις υπόλοιπες 3 θέσεις θα τις συμπληρώσουμε παίρνοντας 3 ψηφία από τα υπόλοιπα 7 ψηφία 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Αυτό γίνεται με $(7)_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ τρόπους.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, μπορούμε να σχηματίσουμε $4 \cdot 210 = 840$ αριθμούς.

Πρόβλημα 5.11 (Πλήθος υποσυνόλων)

(α) Θεωρούμε ένα τυχαίο υποσύνολο B του A με περιττό πλήθος στοιχείων και τα στοιχεία $i \in A$ με $1 \leq i \leq 99$. Ας βρούμε το πλήθος N των υποσυνόλων B .

Κάθε στοιχείο $i \in A$ με $1 \leq i \leq 99$ έχει δύο δυνατότητες: ή ανήκει στο B ή δεν ανήκει στο B .

- Αν ο αριθμός $N(B)$ είναι περιττός, τότε $100 \notin B$.
- Αν ο αριθμός $N(B)$ είναι άρτιος περιττός, τότε $100 \in B$.

Αφού για τον αριθμό 100 έχουμε μόνο μία δυνατότητα και για τους άλλους 99 αριθμούς έχουμε δύο δυνατότητες, θα είναι $N = 2^{99}$, δηλαδή το πλήθος των υποσυνόλων του A με περιττό πλήθος στοιχείων είναι 2^{99} .

Ας παρατηρήσουμε ότι αυτό το πλήθος είναι το μισό του πλήθους όλων των υποσυνόλων του A , που είναι 2^{100} .

(β) Ας πάρουμε ένα υποσύνολο B του A , στο οποίο το γινόμενο των στοιχείων είναι άρτιος αριθμός. Αυτό σημαίνει ότι το B περιέχει έναν τουλάχιστον άρτιο αριθμό, στοιχείο προφανώς του συνόλου A .

Μένει επομένως να βρούμε πόσα υποσύνολα του A έχουν μόνο περιττό πλήθος και το πλήθος αυτό να το αφαιρέσουμε από το πλήθος των υποσυνόλων του A που κατά τα γνωστά είναι 2^{100} .

Το πλήθος των περιττών στοιχείων του A είναι 50, όσα και τα στοιχεία του συνόλου $S = \{1, 3, 5, 7, \dots, 99\}$, αφού $N(S) = 50$. Αλλά το πλήθος των υποσυνόλων του S είναι 2^{50} .

Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της συμπληρωματικής αρίθμησης, το πλήθος των υποσυνόλων του A , στα οποία το γινόμενο των ψηφίων είναι άρτιος αριθμός, είναι $2^{100} - 2^{50}$.

(γ) Για να βρούμε πόσα υποσύνολα του A περιέχουν ένα τουλάχιστον περιττό στοιχείο του A , θα βρούμε πόσα υποσύνολα έχουν μόνο άρτια στοιχεία και το πλήθος τους θα το αφαιρέσουμε από το πλήθος των υποσυνόλων του A .

- ♦ Το $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ έχει $N(A) = 100$ και έτσι 2^{100} υποσύνολα.
- ♦ Το σύνολο $E = \{2, 4, 6, \dots, 98, 100\}$ των άρτιων στοιχείων του A έχει 50 στοιχεία και συνεπώς το πλήθος των υποσυνόλων του E είναι 2^{50} .

Επομένως το πλήθος των υποσυνόλων του A που περιέχουν ένα τουλάχιστον περιττό στοιχείο είναι $2^{100} - 2^{50}$.

Πρόβλημα 5.12 (Συνδυασμοί)

Αν έχουμε το μικρότερο και το μεγαλύτερο στοιχείο κάθε τέτοιου υποσυνόλου, τότε οι υπόλοιποι βρίσκονται ενδιάμεσα.

Αφού θέλουμε με τη διάταξη των στοιχείων κάθε τέτοιου υποσυνόλου να πάρουμε διαδοχικούς αριθμούς, είναι φανερό ότι με τον μικρότερο και τον μεγαλύτερο αριθμό, το υποσύνολο έχει πλήρως καθοριστεί. Για παράδειγμα, με το ζεύγος $(3,7)$ σχηματίζεται μόνο το υποσύνολο $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ και αντιστρόφως, από κάθε τέτοιο υποσύνολο Παίρνουμε το ζεύγος $(3, 7)$.

Δεν έχουμε λοιπόν παρά να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε δύο από τους 20 αριθμούς του συνόλου A . Αυτό όμως γίνεται με

$$\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190 \text{ τρόπους.}$$

Τόσο είναι συνεπώς και το ζητούμενο πλήθος των υποσυνόλων του A με τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Άλλος τρόπος

Ας μετρήσουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις με πιο απλό τρόπο.

- ♦ Με δυο στοιχεία μπορούμε να βρούμε 19 τέτοια υποσύνολα:

$$\{1,2\} - \{2,3\} - \{3,4\} - \dots - \{18,19\} - \{19,20\}$$

Το πλήθος τους είναι προφανώς $20 - 2 + 1 = 19$

- ♦ Με τρία δυο στοιχεία μπορούμε να βρούμε 18 τέτοια υποσύνολα:

$$\{1,2,3\} - \{2,3,4\} - \{3,4,5\} - \dots - \{17,18,19\} - \{18,19,20\}$$

Το πλήθος τους είναι προφανώς $20 - 3 + 1 = 18$.

- ♦ Με την ίδια διαδικασία καταλήγουμε ότι με 19 στοιχεία έχουμε δύο και με 20 στοιχεία ένα μόνο τέτοιο υποσύνολο.

Επομένως, από την προσθετική αρχή, μπορούμε να βρούμε

$$1 + 2 + 3 + \dots + 19 = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190 \text{ υποσύνολα.}$$

Σχόλιο

Με τους δύο τρόπους που αντιμετωπίσαμε την παραπάνω άσκηση αποδείξαμε έμμεσα ότι το άθροισμα $1 + 2 + 3 + \dots + n$ ισούται με το πλήθος των συνδυασμών $n + 1$ ανά 2.

Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι το σύνολο A της άσκησης είναι το $A = \{1, 2, 3, \dots, n, n + 1\}$, τότε το πλήθος των υποσυνόλων του A με δύο τουλάχιστον στοιχεία που αν τα διατάξουμε θα πάρουμε διαδοχικούς, είναι από τη μια μεριά $\binom{n+1}{2}$ και από την άλλη $1 + 2 + 3 + \dots + n$.

Αφού όμως $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$, συμπεραίνουμε ότι

$$1+2+3+\dots+n=\frac{(n+1)\cdot n}{2} \quad \text{ή} \quad 1+2+3+\dots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Τέτοιες αποδείξεις στα μαθηματικά λέγονται **Συνδυαστικές αποδείξεις** και έχουν μερικές φορές εξαιρετικό ενδιαφέρον λόγω της απλότητάς τους στην απόδειξη συνδυαστικών (διωνυμικών) ταυτοτήτων.

Πρόβλημα 5.13 (Πολλαπλασιαστική αρχή-Απλή)

Ανάμεσα σε 20 διαδοχικούς φυσικούς (ή θετικούς ακέραιους) αριθμούς υπάρχουν 10 άρτιοι και 10 περιττοί. πό την άλλη για να είναι το άθροισμα 2 ακέραιων αριθμών ένας να είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.

♦ Από 10 άρτιους μπορούμε να επιλέξουμε έναν με 10 τρόπους.

♦ Από 10 περιττούς μπορούμε να επιλέξουμε έναν με 10 τρόπους.

Σύμφωνα τώρα με την πολλαπλασιαστική αρχή, μπορούμε από 20 διαδοχικούς θετικούς ακεραίους να επιλέξουμε δύο, ώστε το άθροισμά τους να είναι περιττός αριθμός, με $10 \cdot 10 = 100$ τρόπους.

Σχόλιο

Αν θέλαμε να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο, ώστε το άθροισμά τους να είναι άρτιος αριθμός, τότε θα είχαμε:

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{2} = 45 + 45 = 90 \text{ τρόπους}$$

διότι ή θα πάρουμε και τους δύο αριθμούς άρτιους (με $\binom{10}{2}$ τρόπους) ή και τους δύο περιττούς (με $\binom{10}{2}$ τρόπους).

Πρόβλημα 5.14 (Συνδυαστική-Πολλαπλασιαστική αρχή)

(α) Ας πάρουμε τα 5 βιβλία Ανάλυσης. Για το καθένα από αυτά η Κατερίνα έχει δύο δυνατότητες: ή να το πάρει ή να μην πάρει.

Συνολικά λοιπόν, για τα 5 βιβλία της Ανάλυσης έχει 2^5 δυνατότητες και αφού πρέπει να πάρει ένα τουλάχιστον βιβλίο, το πλήθος αυτών των δυνατοτήτων είναι $2^5 - 1$. Εντελώς ανάλογα η συνάδελφος έχει $2^4 - 1$ δυνατότητες για να πάρει ένα τουλάχιστον βιβλίο Συνδυαστικής και $2^3 - 1$ δυνατότητες για να πάρει ένα βιβλίο Γεωμετρίας.

Με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν συνολικά

$$(2^5 - 1)(2^4 - 1)(2^3 - 1) = 31 \cdot 15 \cdot 7 = 3\,255 \text{ τρόποι}$$

(β) Στην νέα περίπτωση η Κατερίνα έχει 2^3 δυνατότητες για να πάρει ένα βιβλίο Γεωμετρίας, αφού πιθανόν να μην πάρει και κανένα. Σκεφτόμενοι με ανάλογο τρόπο, προκύπτει ότι η Κατερίνα μπορεί να πάρει ένα τουλάχιστον βιβλίο από τον κάθε κλάδο με

$$(2^5 - 1)(2^4 - 1) \cdot 2^3 = 31 \cdot 15 \cdot 8 = 3720 \text{ δυνατότητες.}$$

Σχόλιο

Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι ένα βιβλίο Ανάλυσης η Κατερίνα μπορεί να πάρει με:

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 - 1$$

Θυμίζουμε ότι από το δυωνυμικό ανάπτυγμα ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta)^v = \binom{v}{0} \alpha^v \beta^0 + \binom{v}{1} \alpha^{v-1} \beta^1 + \binom{v}{2} \alpha^{v-2} \beta^2 + \dots + \binom{v}{v-2} \alpha^2 \beta^{v-2} + \binom{v}{v-1} \alpha^1 \beta^{v-1} + \binom{v}{v} \alpha^0 \beta^v$$

Αυτή για $\alpha = \beta = 1$ δίνει:

$$2^v = \binom{v}{0} + \binom{v}{1} + \binom{v}{2} + \dots + \binom{v}{v-2} + \binom{v}{v-1} + \binom{v}{v}$$

Επειδή όμως $\binom{v}{0} = 1$, η παραπάνω ισότητα δίνει:

$$\binom{v}{1} + \binom{v}{2} + \dots + \binom{v}{v-2} + \binom{v}{v-1} + \binom{v}{v} = 2^v - 1$$

Πρόβλημα 5.15 (Αναγραμματισμοί με ένα μόνο φωνήεν)

(α) Όπως δηλώνει και ο διπλανός πίνακας, στον οποίο αναγράφουμε τη συχνότητα του κάθε γράμματος στη δοσμένη λέξη, το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της λέξης ΚΑΡΑΚΑΞΑ είναι

$$\binom{8}{2,1,1,4} = \frac{8!}{2!1!1!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 840.$$

Κ	Ρ	Ξ	Α
2	1	1	4

(β) Τοποθετούμε πρώτα τα 4 σύμφωνα. Αυτό γίνεται με

$$\binom{4}{2,1,1} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12 \text{ τρόπους}$$

Τα σύμφωνα σχηματίζουν 5 κενά: Κ Κ Ρ Ξ . Από τα 5 κενά επιλέγουμε τα 4 και σε αυτά τοποθετούμε τα 4 Α. Αυτό γίνεται με $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ τρόπους. Άλλωστε, από τις 5 κενές θέσεις μία μόνο

θα μείνει άδεια, χωρίς Α δηλαδή, και έτσι η απάντηση 5 είναι αναμενόμενη.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι θα πάρουμε:

$$5 \cdot 12 = 60 \text{ τέτοιους αναγραμματισμούς.}$$

Σχόλιο

Θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί αν μπορούμε να λύσουμε αυτό το ερώτημα, τοποθετώντας

πρώτα τα 4 A. Ας το δούμε.

Βάζουμε λοιπόν τα A σε μια σειρά(με έναν τρόπο προφανώς)

__ A __ A __ A __ A __

Θεωρούμε προσωρινά τα σύμφωνα ως να είναι ίδια, πχ ως να είναι όλα N.

Βάζουμε στα τρία κενά που βρίσκονται ανάμεσα στα A (όχι στις άκρες) από ένα N και έτσι έχουμε χωρίσει τα A, εξασφαλίζοντας δηλαδή ότι δεν υπάρχουν συνεχόμενα A.

__ A N A N A N A __

Μένουν ακόμα $4 - 3 = 1$ N και αυτό μπορούμε να το βάλουμε στα 5 αρχικά κενά με 5 τρόπους. Αλλά τα 4 σύμφωνα 2K,1P,1Ξ, που δεν είναι όμως όλα ίδια, διατάσσονται με

$$\binom{4}{2,1,1} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12 \text{ τρόπους.}$$

Επομένως από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $5 \cdot 12 = 60$ αναγραμματισμοί.

Ενότητα 6

Άσκηση 6.1

(α) Το πρώτο ψηφίο είναι αναγκαστικά 2. Οι άλλες θέσεις καλύπτονται με 5 ψηφία η καθεμιά και έτσι με 5^4 δυνατότητες. Ανάμεσα στους αριθμούς που σχηματίζονται δεν υπάρχει ο 20000 όπως επίσης και ο 30000. Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι $5^4 = 625$.

ΔΧ	Χ	Ε	Δ	Μ
1	5	5	5	5

(β) Για να είναι ένα αριθμός πολλαπλάσιο του 4, πρέπει και αρκεί το τελευταίο διψήφιο τμήμα του, όπως το διαβάζουμε ως αριθμό, να διαιρείται με το 4.

ΔΧ	Χ	Ε	Δ	Μ
1	5	5	6	

Με τα ψηφία 2, 3, 5, 6, 9 που διαθέτουμε το τελευταίο διψήφιο τμήμα μπορεί να είναι μόνο

32, 36, 52, 56, 92 και 96

Για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις, τα δύο ψηφία που απομένουν συμπληρώνονται με 5 τρόπους.

Συνολικά λοιπόν και σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν

$$6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150$$

αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 4.

Άσκηση 6.2

Βλέπουμε ότι έχουμε 5 ψηφία, όσα έχει και ο αριθμός 50000. Αφού θέλουμε ο αριθμός να είναι μεγαλύτερος από τον 50000, για το πρώτο ψηφίο (των ΔΧ) έχουμε δύο δυνατότητες: το 5 και το 6.

Για τις άλλες θέσεις θα χρησιμοποιήσουμε τα υπόλοιπα ψηφία, που ανάμεσά τους έχουν δύο φορές το ψηφίο 2 (πχ τα ψηφία 2, 5, 0, 2 ή τα ψηφία 2, 6, 0, 2). Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\frac{4!}{2!} = 12$ περιπτώσεις.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να σχηματίσουμε $2 \cdot 12 = 24$ αριθμούς.

Άσκηση 6.3

Ένας αριθμός διαιρείται με το 4, αν και μόνο αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4. Επομένως οι αριθμοί που ζητάμε μπορούν να τελειώνουν σε κάποιον από τους 12, 20, 32 και 52.

Οι αριθμοί που ζητάμε έχουν το πολύ 4 ψηφία, αφού είναι μικρότεροι ή ίσοι με τον 9999.

Ας μετρήσουμε αυτούς τους αριθμούς, ανάλογα με το πλήθος των ψηφίων τους.

- ♦ Με ένα ψηφίο, δεν σχηματίζεται κανένας αριθμός.
 - ♦ Διψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται 4, οι εξής: 12,20,32 και 52
 - ♦ Ας δούμε τι συμβαίνει με τους τριψήφιους αριθμούς.
 - Αν οι αριθμοί τελειώνουν σε 12,32 ή 52, τότε για το πρώτο ψηφίο έχουμε 2 δυνατότητες μια και τα μη μηδενικά ψηφία είναι 4: 1,2,3,5. Σχηματίζονται επομένως $3 \cdot 2 = 6$ αριθμοί.
 - Αν οι αριθμοί τελειώνουν σε 20, τότε για το πρώτο ψηφίο έχουμε 3 δυνατότητες: 1, 3, 5
- Σύμφωνα με την προσθετική αρχή σχηματίζονται $6 + 3 = 9$ αριθμοί.
- ♦ Τέλος, ας βρούμε το πλήθος των τετραψήφιων αυτών αριθμών.
 - Αν τελειώνουν σε 12,32 ή 52, τότε για τις υπόλοιπες δύο θέσεις διαθέτουμε 3 ψηφία, ανάμεσα τους και το 0. Δεν πρέπει όμως ο αριθμός να ξεκινάει με 0 και έτσι έχουμε $2 \cdot 2 = 4$ αριθμούς.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν σκεφτούμε ότι με τα 3 ψηφία σχηματίζονται, χωρίς επανάληψη ψηφίων, $3! = 6$ αριθμοί και από αυτούς οι $2! = 2$ ξεκινάνε με 0, οπότε πρέπει να αφαιρεθούν.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή παίρνουμε $3 \cdot 4 = 12$ τετραψήφιους αριθμούς για αυτή την περίπτωση (με τελευταίο δηλαδή διψήφιο τμήμα έναν από τους 12,32 ή 52).

- Αν ο αριθμός τελειώνει σε 20, τότε το υπόλοιπο διψήφιο τμήμα του σχηματίζεται με $3! = 6$ τρόπους, αφού διαθέτουμε 3 ψηφία, τα 1, 3, 5.

Επομένως, από την προσθετική αρχή παίρνουμε $12 + 6 = 18$ τετραψήφιους αριθμούς με τις ιδιότητες που θέλουμε και συνολικά:

$$4 + 9 + 18 = 31 \text{ αριθμούς.}$$

Πλήθος ψηφίων του αριθμού	Δυνατότητες
1	0
2	4
3	9
4	18
ΣΥΝΟΛΟ	31

Άσκηση 6.4

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι όσες οι μεταθέσεις των 11 στοιχείων, δηλαδή 11!

A	2	3	4	5	6	B	8	9	10	11
	α	β	γ	δ	ε	1	2	3	4	5

Ας βρούμε τις ευνοϊκές περιπτώσεις.

Όπως μπορούν να συμπεράνουμε από τον πίνακα, αν ο A είναι στη θέση 1 και ο B στη θέση 7, τότε ανάμεσα στους A και B υπάρχουν 5 άτομα. Το ίδιο θα συμβαίνει αν μετακινήσουμε το μπλοκ A23456B προς τα δεξιά, μέχρι το B να έρθει στη θέση 11. Υπάρχουν λοιπόν 5 τέτοιες περιπτώσεις. Για κάθε μία από αυτές οι A και B εναλλάσσονται με 2 τρόπους: AB ή BA. Τα υπόλοιπα 9 άτομα κάθονται με $9!$ τρό-

πους. Επομένως η ζητούμε πιθανότητα είναι:

$$\frac{5 \cdot 2 \cdot 9!}{11!} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 9!}{9! \cdot 10 \cdot 11} = \frac{10}{10 \cdot 11} = \frac{1}{11}$$

Σχόλιο

Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων μπορούμε να το βρούμε και ως εξής:

- Αφήνουμε προσωρινά στην άκρη τους Α και Β.
Διαλέγουμε 5 άτομα από τα $11 - 2 = 9$ άτομα για να τα βάλουμε ανάμεσα στα Α και Β. Αυτό γίνεται με $\binom{9}{5}$ τρόπους.
- Στην πεντάδα αυτή προσαρτούμε στις άκρες τα άτομα Α και Β με $2! = 2$ τρόπους.
- Έχουμε σχηματίσει επτάδες. Παίρνουμε κάθε επτάδα και τη μεταθέτουμε με τα άλλα 4 άτομα που περισσεύουν. Αφού έχουμε 5 αντικείμενα (την 7-άδα και τα 4 άτομα), αυτά μετατίθενται με $5!$ τρόπους.
- Μέσα στους σχηματισμούς των 5 αντικειμένων, τα 5 άτομα της αρχικής πεντάδας μετατίθενται με $5!$ τρόπους.
- Από την πολλαπλασιαστική αρχή απαρίθμησης συμπεραίνουμε ότι έχουμε

$$\binom{9}{5} \cdot 2 \cdot 5! \cdot 5! = \frac{9!}{5!4!} \cdot 2 \cdot 5! \cdot 5! = 9! \cdot 2 \cdot 5 \text{ τρόπους.}$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{2 \cdot 5 \cdot 9!}{11!} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 9!}{9! \cdot 10 \cdot 11} = \frac{1}{11}$$

Τον παραπάνω τρόπο αυτό υπέδειξε ο συνάδελφος Τάσος Οράτης.!

Άσκηση 6.5

Θα εφαρμόσουμε την προσθετική αρχή, με βάση το πλήθος των ψηφίων κάθε αριθμού.

- Με τέσσερα ψηφία σχηματίζονται $9 \cdot (9)_3$ αριθμοί. Τονίζουμε ότι για τη θέση των χιλιάδων έχουμε 9 δυνατότητες, αφού το 0 εξαιρείται από την πρώτη θέση και όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά.
- Με τρία ψηφία σχηματίζονται $9 \cdot (9)_2$ αριθμοί.
- Με δύο ψηφία σχηματίζονται $9 \cdot 9$ αριθμοί.
- Με ένα ψηφίο σχηματίζονται 10 αριθμοί.

Συνολικά παίρνουμε

$$9 \cdot (9)_3 + 9 \cdot (9)_2 + 9 \cdot 9 + 10 = 4536 + 648 + 81 + 10 = 5275 \text{ αριθμούς.}$$

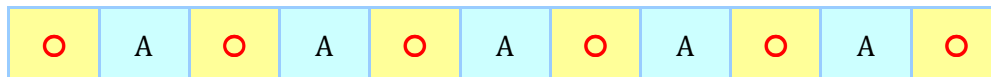
Άσκηση 6.6

Βλέπουμε τα 5 κορίτσια ως μία ομάδα Κ, δηλαδή ως να είναι ένα κορίτσι Κ. Το κορίτσι Κ και τα 5 αγόρια κάθονται στη σειρά με $6!$ τρόπους. Μέσα όμως στην ομάδα Κ τα 5 κορίτσια εναλλάσσονται με

5! τρόπους. Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι τα κορίτσια κάθονται όλα δίπλα-δίπλα με $N = 5!6!$ τρόπους.

Ας δούμε τώρα με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν τα παιδιά, έτσι ώστε μόνο 4 κορίτσια να κάθονται δίπλα -δίπλα, δηλαδή σε διαδοχικές θέσεις.

Βάζουμε πρώτα να καθίσουν τα 5 αγόρια στη σειρά. Αυτό γίνεται με 5! τρόπους.



Τα αγόρια σχηματίζουν 6 κενά, για να καθίσει η τετράδα των κοριτσιών, έστω Λ και το κορίτσι που περισσεύει, έστω Σ. Στο διάγραμμα τα κενά είναι σημειωμένα με Ο.

Τα 4 κορίτσια τα επιλέγουμε από τα 5 με $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ τρόπους.

Επιλέγουμε από αυτά τα 6 κενά τα δύο για να καθίσουν η ομάδα Λ και το κορίτσι Ρ.

Η επιλογή των δύο κενών γίνεται με $\binom{6}{2}$ τρόπους και σε αυτά τα Κ, Λ " κάθονται " με $\binom{6}{2} \cdot 2!4!$

τρόπους. Επομένως: $M = 5 \cdot 5! \cdot \binom{6}{2} \cdot 2!4! = 5 \cdot 5! \cdot \frac{6!}{2!4!} \cdot 2!4! = 5 \cdot 5!6!$ τρόπους και συνεπώς

$$\frac{M}{N} = \frac{5 \cdot 5!6!}{5!6!} = 5$$

Άλλος τρόπος εύρεσης του Μ

Τα 4 κορίτσια τα επιλέγουμε από τα 5 με $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$ τρόπους και αυτά εναλλάσσονται μεταξύ

τους με $5 \cdot 4!$

Βλέπουμε τα 4 κορίτσια ως μία ομάδα Κ, δηλαδή ως να είναι ένα κορίτσι Κ. Το Κ και το κορίτσι Ρ που περισσεύει τα βλέπουμε ως μία ομάδα Γ.

Η ομάδα Κ, το κορίτσι Ρ και τα 5 αγόρια κάθονται με 7! τρόπους. Από αυτούς όμως τους τρόπους πρέπει να εξαιρέσουμε εκείνους που τα Κ και Ρ βρίσκονται δίπλα-δίπλα. Όμως, για να το πετύχουμε αυτό βλέπουμε πάλι τα Κ, Ρ ως μία ομάδα. Η ομάδα Γ που έχει δύο στοιχεία και τα 5 αγόρια κάθονται με $6!2!$ τρόπους. Το 2! προφανώς μπαίνει διότι τα στοιχεία Κ,Ρ της ομάδας Γ εναλλάσσονται με 2 τρόπους.

Συνολικά λοιπόν έχουμε:

$$M = 5 \cdot 4!(7! - 2 \cdot 6!) = 5!6!(7 - 2) = 5 \cdot 5!6!$$

Άσκηση 6.7

Το πλεονέκτημα σε αυτό το πρόβλημα είναι ότι χρησιμοποιούμε τα ψηφία 0,1,2 που έχουν άθροισμα 3. Από την άλλη, ένας αριθμός διαιρείται με το 3, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με τον 3, είναι δηλαδή της μορφής $3n$, με $n \in \mathbb{N}$.

Ο αριθμός 200.000 έχει 6 ψηφία. Κάθε αριθμός ίσος ή μικρότερος από αυτόν έχει τη μορφή $\overline{αβγδεζ}$.

Ας βρούμε πόσοι είναι οι αριθμοί με 5 το πολύ ψηφία που σχηματίζονται με τα ψηφία 0,1,2. Αυτοί έχουν τη μορφή $\overline{αβγδε}$ και προφανώς κάποια ή όλα από τα α,β,γ,δ,ε μπορεί να είναι μηδέν.

Σε κάθε έναν από αυτούς θα συμπληρώσουμε στο τέλος ένα ψηφίο, ώστε να προκύψει αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 3, αρκεί φυσικά αυτό, για ευκολία, να γίνεται μόνο με έναν τρόπο.

Για την πρώτη θέση έχουμε 2 δυνατότητες: 0 ή 1, διότι οι αριθμοί που ζητάμε, βάζοντας και το τελευταίο ψηφίο, είναι μικρότεροι από τον 200.000. Για κάθε άλλη από τις επόμενες 4 θέσεις έχουμε 3 δυνατότητες: β, γ, δ, ε $\in \{0,1,2\}$ και συνολικά σχηματίζονται $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$ αριθμοί.

Ας πάρουμε έναν από αυτούς τους αριθμούς.

- ♦ Αν το άθροισμα των ψηφίων είναι της μορφής $3n$, τότε στο τέλος βάζουμε το ψηφίο 0.
- ♦ Αν το άθροισμα των ψηφίων είναι της μορφής $3n+1$, τότε στο τέλος βάζουμε το ψηφίο 2.
- ♦ Αν το άθροισμα των ψηφίων είναι της μορφής $3n+2$, τότε στο τέλος βάζουμε το ψηφίο 1.

Το πλήθος όλων αυτών των αριθμών που σχηματίζονται είναι 162 και είναι πολλαπλάσια του 3.

Άσκηση 6.8

Ας αφήσουμε προσωρινά στην άκρη το τελευταίο ψηφίο και ας δούμε πόσους πενταψήφιους αριθμούς έχουμε.

Για την πρώτη θέση έχουμε 9 ψηφία και για καθεμιά από τις υπόλοιπες 4 θέσεις 10 ψηφία. Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή σχηματίζονται $9 \cdot 10^4$ πενταψήφιου αριθμοί.

Αυτό φυσικά μπορούμε να το βρούμε και ως εξής.

Ο μικρότερος πενταψήφιος φυσικός αριθμός είναι ο $10.000 = 10^4$ και ο μεγαλύτερος είναι ο $999.999 = 10^5 - 1$. Το πλήθος αυτών των αριθμών είναι:

$$(10^5 - 1) - 10^4 + 1 = 10^4(10 - 1) = 9 \cdot 10^4.$$

Ας πάρουμε τώρα έναν από τους πενταψήφιους αριθμούς.

- ♦ Αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι άρτιος, τότε βάζουμε στο τέλος ένα από τα 5 περιττά ψηφία 1,3,5,7,9 και παίρνουμε έναν εξαψήφιο, του οποίου το άθροισμα των ψηφίων είναι περιττός.
- ♦ Αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι περιττός, τότε βάζουμε στο τέλος ένα από τα 5 άρτια ψηφία 0,2,4,6,8 και παίρνουμε έναν εξαψήφιο, του οποίου το άθροισμα των ψηφίων είναι περιττός.

Επομένως, το πλήθος των εξαψήφιων αριθμών με άθροισμα ψηφίων περιττό αριθμό είναι όσοι οι πενταψήφιοι αριθμοί, πολλαπλασιαζόμενοι με το 5, δηλαδή $5 \cdot 9 \cdot 10^4 = 45 \cdot 10^4$.

Ας σημειώσουμε ότι το ζητούμενο πλήθος αριθμών δεν είναι

$$5 \cdot 9 \cdot 10^4 + 5 \cdot 9 \cdot 10^4 = 9 \cdot 10^5,$$

διότι οι πενταψήφιοι αριθμοί με άθροισμα ψηφίων άρτιο δεν είναι όλοι οι πενταψήφιοι, αλλά ένα μέρος τους, έστω x , που δίνει $5x$ εξαψήφιους με άθροισμα ψηφίων περιττό. Το άλλο μέρος τους, έστω y , έχει άθροισμα ψηφίων περιττό και δίνει $5y$ εξαψήφιους με άθροισμα ψηφίων περιττό. Επομένως όλοι οι ζητούμενοι εξαψήφιοι αριθμοί έχουν πλήθος

$$5x + 5y = 5(x + y) = 5 \cdot 9 \cdot 10^4.$$

Άσκηση 6.9

Επιλέγουμε τις 3 από τις 6 θέσεις για να το τοποθετήσουμε το ψηφίο 1. Αυτό γίνεται με

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \text{ τρόπους.}$$

Στις άλλες θέσεις βάζουμε το ψηφίο 2 και ο αριθμός έχει σχηματιστεί.

Υπάρχουν επομένως 20 εξαψήφιοι αριθμοί που περιέχουν τρεις φορές το ψηφίο 1 και τρεις φορές το ψηφίο 2.

Άλλος τρόπος

Κάθε τέτοιος αριθμός είναι μια μετάθεση με επανάληψη 6 στοιχείων, στην οποία τρία στοιχεία είναι τύπου A (εδώ είναι το ψηφίο 1) και τρία στοιχεία είναι τύπου B (εδώ είναι το ψηφίο 2).

1	1	2	1	2	2
---	---	---	---	---	---

Το πλήθος αυτών των μεταθέσεων είναι:

$$M = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 4 \cdot 5 = 20$$

Άλλος τρόπος

Αν στις τρεις πρώτες θέσεις έχουμε τα ψηφία 1, 1, 1 τότε σχηματίζεται μόνο ένας αριθμός, ο 111222.

♦ Αν για τρεις πρώτες θέσεις έχουμε τα ψηφία 1, 1, 2, τότε σχηματίζονται 3 αριθμοί στις τρεις πρώτες θέσεις και 3 αριθμοί με τα άλλα ψηφία 2,2,1 στις 3 τελευταίες θέσεις. Συνολικά θα πάρουμε $3 \cdot 3 = 9$ αριθμούς.

♦ Αν για τρεις πρώτες θέσεις έχουμε τα ψηφία 1, 2, 2, τότε πάλι σχηματίζονται 3 αριθμοί στις τρεις πρώτες θέσεις και 3 αριθμοί με τα άλλα ψηφία 2,1, 1 στις 3 τελευταίες θέσεις. Συνολικά θα πάρουμε $3 \cdot 3 = 9$ αριθμούς.

Αν στις τρεις πρώτες θέσεις έχουμε τα ψηφία 2, 2, 2 τότε σχηματίζεται μόνο ένας αριθμός, ο 222111.

Από την προσθετική αρχή συμπεραίνουμε ότι θα πάρουμε $1 + 9 + 9 + 1 = 20$ αριθμούς.

Σχόλιο

Ας θεωρήσουμε το πιο απλό πρόβλημα:

Πόσοι τετραψήφιοι φυσικοί αριθμοί σχηματίζονται χρησιμοποιώντας 2 φορές το ψηφίο 1 και 2 φορές το ψηφίο 2;

Εδώ, πέρα από τους παραπάνω τρόπους, μπορούμε να εφαρμόσουμε την προσθετική αρχή και ως εξής:

(α) Ας δούμε τι μπορεί να γίνει στην πρώτη θέση:

- ♦ Αν βάλουμε το 1, τότε το άλλο 1 έχει τρεις δυνατότητες: μία από τις 3 θέσεις που απομένουν.
 - ♦ Αν βάλουμε το 2, τότε το άλλο 2 έχει τρεις δυνατότητες: μία από τις 3 θέσεις που απομένουν.
- Επομένως, συνολικά έχουμε $3+3=6$ δυνατότητες να σχηματίσουμε αυτούς τους τετραψήφιους.

(β) Ας δούμε τι μπορεί να συμβεί στις δύο πρώτες θέσεις:

- ♦ Αν βάλουμε τα ψηφία 1, 1, τότε για τις θέσεις που απομένουν έχουμε μία δυνατότητα: 22.
 - ♦ Αν βάλουμε τα ψηφία 1, 2 (δύο τρόποι: 12, 21), τότε για τις δύο άλλες θέσεις έχουμε πάλι 2 δυνατότητες (12, 21). Από την πολλαπλασιαστική αρχή παίρνουμε $2 \cdot 2 = 4$ αριθμούς.
 - ♦ Αν βάλουμε τα ψηφία 2, 2, τότε για τις θέσεις που απομένουν έχουμε μία δυνατότητα: 11.
- Από την προσθετική αρχή συμπεραίνουμε ότι έχουμε $1+2+2+1=6$ τρόπους για να σχηματίσουμε αυτούς τους τετραψήφιους αριθμούς.

Άσκηση 6.10

(α) Αρχικά παρατηρούμε ότι δύο γράμματα θα είναι υποχρεωτικά ίδια.

Διαλέγουμε 2 από τις 5 θέσεις με $\binom{5}{2}$ τρόπους για να βάλουμε το ίδιο γράμμα.

Διαλέγουμε τώρα το γράμμα από τα 4 που θα γράψουμε δύο φορές. Αυτό γίνεται με $\binom{4}{1}$ τρόπους.

Μένουν έτσι 3 θέσεις και 3 διαφορετικά γράμματα. Αυτές οι θέσεις συμπληρώνονται με $3!$ τρόπους (ή με $\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ τρόπους)

Από την πολλαπλασιαστική αρχή, σχηματίζονται $\binom{5}{2}\binom{4}{1}3! = 10 \cdot 4 \cdot 6 = 240$ λέξεις

Άλλος τρόπος

Μια πιθανή λέξη είναι ΕΤΟΣΕ. Αυτή σχηματίζεται με

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 60 \text{ τρόπους.}$$

Έχουμε όμως $\binom{4}{1} = 4$ τρόπους για να πάρουμε το γράμμα, όπως εδώ το Ε, που γράφουμε δύο φο-

ρές. Έτσι, από την πολλαπλασιαστική αρχή, σχηματίζονται $60 \cdot 4 = 240$ λέξεις.

Σχόλιο

Η πιθανότητα να πάρουμε λέξη 5 γραμμάτων με αυτά τα γράμματα είναι

$$p = \frac{240}{4^5} = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 5}{2^{10}} = \frac{15}{64}$$

(β) Η λέξη ΟΤΕ, ως μπλοκ, έχει 3 θέσεις μέσα σε κάθε λέξη πέντε γραμμάτων. Αυτές φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

O	T	E	-	-
-	O	T	E	-
-	-	O	T	E

Ας δούμε πώς θα συμπληρώσουμε τις δύο κενές θέσεις:

- ❖ Αν αυτές έχουν το ίδιο γράμμα, αυτό αναγκαστικά είναι το Σ. Έχουμε επομένως έναν τρόπο (ΣΣ).
- ❖ Αν οι κενές θέσεις έχουν το Σ και ένα από τα 3 (E,T,O), έχουμε $\binom{3}{1} \cdot 2 = 6$ τρόπους, τους:

ΣΕ, ΕΣ, ΣΤ, ΤΣ, ΣΟ, ΟΣ

Πολλαπλασιάσαμε το $\binom{3}{1}$ με 2!, διότι τα 2 γράμματα μπαίνουν στις 2 θέσεις με 2! θέσεις.

Επομένως, συνολικά σχηματίζονται $3 \cdot (1 + 6) = 21$ λέξεις.

(γ) Αφού θέλουμε πεντάδες χωρίς διάταξη, αλλά με επανάληψη, πρόκειται για συνδυασμούς με επανάληψη των τεσσάρων στοιχείων ανά πέντε. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο **stars and bars**.

Βάζουμε για ευκολία τα γράμματα σε αλφαβητική σειρά, αφού δεν ενδιαφέρει η διάταξη:

E, O, S, T

Για τα 4 γράμματα θεωρούμε σε μια ευθεία 3 μπάρες, οι οποίες δημιουργούν 4 κενά, όσα είναι και τα γράμματα.

Στο κάθε κενό θα βάζουμε ή όχι αστερίσκους. Το πλήθος των αστερίσκων δείχνει πόσες φορές έχουμε πάρει το γράμμα αυτό στην πεντάδα.

Στον παρακάτω πίνακα οι μπάρες είναι σημειωμένες με έντονη κατακόρυφη γραμμή.

Θέση για το E	Θέση για το O	Θέση για το Σ	Θέση για το T
*		*	***

Ο παραπάνω πίνακας δείχνει την πεντάδα ΕΣΤΤΤ. Αντίθετα, ο παρακάτω πίνακας δηλώνει την πεντάδα ΟΟΣΤΤ

Θέση για το E	Θέση για το O	Θέση για το Σ	Θέση για το T
	**	*	**

Η πεντάδα ΣΣΣΣΤ δηλώνεται όπως στον επόμενο πίνακα:

Θέση για το Ε	Θέση για το Ο	Θέση για το Σ	Θέση για το Τ
		****	*

Κάθε τέτοιος σχηματισμός αντιστοιχεί σε μία πεντάδα, δηλαδή σε μία λέξη με πέντε γράμματα που σχηματίζουν οι κάρτες και αντίστροφα. Δεν έχουμε λοιπόν, παρά να μετρήσουμε το πλήθος αυτών των σχηματισμών που αποτελούνται από $3+5=8$ στοιχεία, τις 3 μπάρες και τους 5 αστερίσκους. Το πλήθος αυτών των 8-άδων είναι $\frac{8!}{3!5!}$.

Αυτό βέβαια μπορούμε να το συμπεράνουμε και ως εξής:

Επιλέγουμε από τις 8 θέσεις τις τρεις για τις μπάρες και στις 5 άλλες βάζουμε αστερίσκους. Αλλά η επιλογή των 3 θέσεων γίνεται με

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!}$$

Το πλήθος λοιπόν των λέξεων που σχηματίζεται με αυτόν τον τρόπο είναι

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

Σχόλιο

Τίποτα δεν αλλάζει αν βάλουμε πρώτα τα 5 αστεράκια που είναι τα 5 στοιχεία της πεντάδας και μετά φέρουμε τις 3 μπάρες, ξεκινώντας τελείως από αριστερά προς τα δεξιά, εξαντλώντας όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

Έτσι, ο σχηματισμός **/**/**** αντιστοιχεί στην πεντάδα **ΟΟΤΤΤ**. Αριστερά της πρώτης μπάρας υπάρχουν 0 αστερίσκοι, κανένα δηλαδή Ε. Το κενό ανάμεσα στη 2^η και στην 3^η μπάρα δηλώνει ότι δεν θα πάρουμε κανένα Σ.

Ο σχηματισμός ******/**** δηλώνει τη λέξη: **ΕΕΕΤ** αφού τα πεδία των Ο και Σ είναι κενά.

Το πλήθος λοιπόν των μη διατεταγμένων αυτών πεντάδων είναι όσο το πλήθος των τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε τις 3 μπάρες σε 3 από τις 8 διαθέσιμες θέσεις, δηλαδή ίσο με

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Φυσικά, το πλήθος αυτό είναι ίσο και με $\binom{8}{5}$, όσοι δηλαδή είναι οι τρόποι που επιλέγονται 5 θέσεις για να μpoonε οι αστερίσκοι.

Γενικά, αν έχουμε ένα σύνολο Α με ν στοιχεία και σχηματίσουμε **μη διατεταγμένες** κ-άδες παίρνοντας κ από τα στοιχεία από το Α, με επανάθεση, τότε το πλήθος αυτών των κ-άδων είναι

$$\left\langle \begin{matrix} \nu \\ \kappa \end{matrix} \right\rangle = \binom{\nu + \kappa - 1}{\nu} \quad \text{ή} \quad \left\langle \begin{matrix} \nu \\ \kappa \end{matrix} \right\rangle = \binom{\nu + \kappa - 1}{\kappa - 1}$$

Άσκηση 6.11 (Αριθμοί και ψηφία)

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της συμπληρωματικής απαρίθμησης.

Το πλήθος όλων των τετραψήφιων αριθμών είναι $9 \cdot 10^3$, αφού στην πρώτη θέση των χιλιάδων (X) δεν μπορούμε να βάλουμε το ψηφίο 0, κάθε όμως άλλη θέση συμπληρώνεται με 10 τρόπους, όσα είναι τα ψηφία.

Το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών που δεν περιέχουν ούτε το 2 ούτε το 3, είναι $7 \cdot 8^3$, αφού για την πρώτη θέση έχουμε 7 δυνατότητες (1, 4, 5, 6, 7, 8, 9) ενώ για άλλες 3 θέσεις έχουμε 8 δυνατότητες (0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Επομένως το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών που δεν περιέχουν ένα τουλάχιστον από τα ψηφία 2 και 3, είναι ίσο με:

$$9 \cdot 10^3 - 7 \cdot 8^3 = 9000 - 7 \cdot 512 = 9000 - 3584 = 5416$$

Άσκηση 6.12 (Συνδυασμοί)

Ανάμεσα σε 30 διαδοχικούς φυσικούς (ή θετικούς ακέραιους) αριθμούς υπάρχουν 15 άρτιοι και 15 περιττοί.

Από την άλλη για να είναι το άθροισμα 3 ακεραίων αριθμών άρτιος, πρέπει ή να είναι και οι τρεις άρτιοι ή δύο να είναι περιττοί και ένας άρτιος.

♦ Από 15 άρτιους μπορούμε να επιλέξουμε 3 με $\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ τρόπους.

♦ Από 15 περιττούς μπορούμε να επιλέξουμε 2 με $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} = 105$ τρόπους.

♦ Τον έναν άρτιο αριθμό τον επιλέγουμε από τους 15 με 15 τρόπους. Επομένως, δύο περιττούς και έναν άρτιο μπορούμε να επιλέξουμε με $\binom{15}{2} \cdot 15 = 105 \cdot 15 = 1575$ τρόπους.

Σύμφωνα τώρα με την προσθετική αρχή, μπορούμε από 30 διαδοχικούς θετικούς ακεραίους να επιλέξουμε τρεις, ώστε το άθροισμά τους να είναι άρτιος αριθμός, με $455 + 1575 = 2030$ τρόπους.

Πρόβλημα 6.13 (Συνδυασμοί)

Αφού τα φρούτα είναι συνολικά 12 και τα παιδιά είναι 10, τότε θα συμβαίνει ένα και μόνο από τα εξής:

- Τα 9 παιδιά παίρνουν από ένα ακριβώς φρούτο και ένα παιδί παίρνει 3.
- Τα 8 παιδιά παίρνουν από ένα ακριβώς φρούτο και τα δύο παιδιά παίρνουν από 2.

1^η περίπτωση:

Ας δούμε πώς μπορεί να πάρει το ένα παιδί 3 φρούτα. Οι δυνατές περιπτώσεις είναι:

AAA, AAM, AMM, MMM

όπου με A και M συμβολίζουμε το αχλάδι και το μήλο αντίστοιχα.

Κατανομή των 3 φρούτων	Πλήθος αχλαδιών που περισσεύουν	Τρόποι που μοιράζονται τα υπόλοιπα αχλάδια και τα υπόλοιπα μήλα στα 9 παιδιά
AAA	3	$\binom{10}{1}\binom{9}{3}\binom{6}{6}$, αφού περισσεύουν 6 μήλα
AAM	4	$\binom{10}{1}\binom{9}{4}\binom{5}{5}$, αφού περισσεύουν 5 μήλα
AMM	5	$\binom{10}{1}\binom{9}{5}\binom{4}{4}$, αφού περισσεύουν 4 μήλα
MMM	6	$\binom{10}{1}\binom{9}{6}\binom{3}{3}$, αφού περισσεύουν 3 μήλα

Ο αριθμός $\binom{10}{1}$ δηλώνει ότι το ένα παιδί που θα πάρει τα 3 φρούτα μπορεί να επιλεγεί από τα 10 με $\binom{10}{1} = 10$ τρόπους, όσα είναι και τα παιδιά. Τα φρούτα επομένως, μπορούν να δοθούν στην περίπτωση αυτή στα παιδιά με:

$$\begin{aligned} & \binom{10}{1}\binom{9}{3}\binom{6}{6} + \binom{10}{1}\binom{9}{4}\binom{5}{5} + \binom{10}{1}\binom{9}{5}\binom{4}{4} + \binom{10}{1}\binom{9}{6}\binom{3}{3} = 10 \cdot \left(\binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} \right) = \\ & = 10 \cdot \left(\binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{4} + \binom{9}{3} \right) = 20 \cdot \left(\binom{9}{3} + \binom{9}{4} \right) = 1680 + 2520 = 4200 \text{ τρόπους.} \end{aligned}$$

2^η περίπτωση:

Ας δούμε πώς μπορεί να πάρουν δύο παιδιά τέσσερα φρούτα, δύο το καθένα (2-2).

AA-AA, AA-AM, MM-AA, AM-AM, MM-AM, MM-MM

Τα δύο παιδιά επιλέγονται από τα 10 με $\binom{10}{2}$ τρόπους. Οδηγούμαστε έτσι στον παρακάτω πίνακα:

Κατανομή των 4 φρούτων, από 2 στο κάθε παιδί.		Πλήθος αχλαδιών και μήλων που περισεύουν		Τρόποι που μοιράζονται τα υπόλοιπα αχλάδια και τα υπόλοιπα μήλα στα 8 παιδιά
AA	AA	A	M	$\binom{10}{2} \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{6}$, αφού περισσεύουν 6 μήλα
		2	6	
AA	AM	3	5	$\binom{10}{2} 2! \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{5}$, αφού περισσεύουν 5 μήλα
AA	MM	4	4	$\binom{10}{2} 2! \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$, αφού περισσεύουν 4 μήλα
AM	AM	4	4	$\binom{10}{2} \binom{8}{5} \cdot \binom{4}{4}$, αφού περισσεύουν 4 μήλα
AM	MM	5	3	$\binom{10}{2} 2! \binom{8}{5} \cdot \binom{3}{3}$, αφού περισσεύουν 3 μήλα
MM	MM	6	2	$\binom{10}{2} \binom{8}{6} \cdot \binom{2}{2}$, αφού περισσεύουν 2 μήλα

Τονίζουμε ότι οι κατανομές AA – AA, AM – AM, MM – MM είναι ίδιες και έτσι δεν πολλαπλασιάζουμε με το 2!.

Σημειώνουμε και εδώ ότι τα 2 παιδιά που θα πάρουν τα 4 φρούτα μπορούν να επιλεγούν με $\binom{10}{2}$

τρόπους. Τα φρούτα μπορούν να δοθούν στην περίπτωση αυτή στα παιδιά με:

$$\begin{aligned} & \binom{10}{2} \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{6} + \binom{10}{2} 2! \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{5} + \binom{10}{2} 2! \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4} + \binom{10}{2} \binom{8}{5} \cdot \binom{4}{4} + \binom{10}{2} 2! \binom{8}{5} \cdot \binom{3}{3} + \binom{10}{2} \binom{8}{6} \cdot \binom{2}{2} = \\ & = \binom{10}{2} \left(\binom{8}{2} + 2! \binom{8}{3} + 2! \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + 2! \binom{8}{5} + \binom{8}{6} \right) = 45 \cdot \left(\binom{8}{2} + 2! \binom{8}{3} + 2! \binom{8}{4} + \binom{8}{3} + 2! \binom{8}{3} + \binom{8}{2} \right) = \\ & 1260 + 5040 + 6300 + 1260 + 5040 + 3150 = 22050 \end{aligned}$$

Συνολικά λοιπόν, υπάρχουν $4200 + 22050 = 26250$ τρόποι.

Μια κουβέντα πάνω στο πρόβλημα!

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να παρουσιάσουμε το παραπάνω πρόβλημα σε μια τάξη.

Στην ερώτησή μας πώς θα πάρουν τα παιδιά αυτά τα 12 φρούτα, το πρώτο πράγμα που θα μας πούνε οι μαθητές είναι ότι:

- Πρώτα θα δώσουμε σε όλους από ένα φρούτο, μήλο ή αχλάδι, και
- Μετά θα δώσουμε τα δύο φρούτα που περισσεύουν.

Ναι, αλλά πώς θα δώσουμε τα δύο φρούτα που περισσεύουν; Μα θα δώσουμε ή και τα δύο φρούτα

σε ένα παιδί ή θα δώσουμε από ένα σε δύο παιδιά. Επομένως ή ένα παιδί θα πάρει 3 φρούτα και τα υπόλοιπα 9 από ένα ή δύο παιδιά θα πάρουν από 2 και τα υπόλοιπα 8 από ένα φρούτο. Πώς όμως με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, τη στιγμή που δεν ξέρουμε τι φρούτο έχει το κάθε παιδί, ώστε να ξέρουμε ποιες περιπτώσεις είναι διαφορετικές και να αποφύγουμε διπλομετρήσεις; Αναφύεται σοβαρό εμπόδιο.

Ας γυρίσουμε λίγο πίσω.

(α) Αν δώσουμε και τα δύο φρούτα σε ένα παιδί, τότε τα 9 παιδιά θα έχουν από ένα φρούτο και ένα θα έχει 3 φρούτα.

(β) Αν δώσουμε από ένα φρούτο σε δύο παιδιά, τότε 8 παιδιά θα έχουν από ένα φρούτο και δύο παιδιά θα έχουν από δύο.

Κάτι αρχίζει να διαφαίνεται ότι μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την απαρίθμηση όλων των περιπτώσεων. Πράγματι, ο εντοπισμός αυτών των δύο περιπτώσεων, οδηγεί στην προσθετική αρχή. Μένει λοιπόν να δούμε αναλυτικά τι θα κάνουμε στην κάθε περίπτωση.

(α) Αν ένα παιδί πάρει 3 φρούτα, τότε γνωρίζοντας τι ακριβώς πήρε, μπορούμε να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούν τα υπόλοιπα 9 παιδιά να πάρουν τα πάρουν τα $12-3=9$ φρούτα που περισσεύουν. Είναι επομένως φανερό ότι πρέπει να εξετάσουμε τι φρούτα πήρε αυτό το παιδί, δηλαδή ποια είναι αυτά τα 3 φρούτα. Είναι όλα αχλάδια (Α), όλα μήλα (Μ) ή είναι ...ανακατωμένα. Δεν είναι όμως δύσκολο να καταλάβουμε ότι αυτά τα τρία φρούτα μπορεί να είναι:

AAA ή AAM ή AMM ή MMM

(i) Στην περίπτωση **AAA** δεν έχουμε παρά να κάνουμε την παρακάτω πορεία:

♦ Επιλέγουμε ένα παιδί από τα 10 με $\binom{10}{1}$ τρόπους για να του δώσουμε τα 3 φρούτα.

♦ Έχουν περισσέψει $6-3=3$ αχλάδια και $6-0=6$ μήλα. Αυτά θα μοιραστούν στα υπόλοιπα 9 παιδιά με $\binom{9}{3}\binom{6}{6}=\binom{9}{3}$ τρόπους.

Ας σημειώσουμε εδώ ότι αν δοθούν στα 9 παιδιά τα 3 αχλάδια, αυτομάτως δίνονται στα υπόλοιπα παιδιά τα 6 μήλα. Ο παράγοντας λοιπόν $\binom{6}{6}$ μπορεί και να παραλείπεται.

Επομένως η περίπτωση AAA δίνει $\binom{10}{1}\binom{9}{3}$ δυνατότητες κατανομής των 12 φρούτων στα δέκα παιδιά.

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

(ii) Στην περίπτωση **AAM** έχουμε περισσέψει $6-2=4$ αχλάδια και $6-1=5$ μήλα. Έχουμε επομένως $\binom{10}{1}\binom{9}{4}$ τρόπους.

(iii) Στην περίπτωση **AMM** έχουμε περισσέψει $6-1=5$ αχλάδια και $6-2=4$ μήλα. Έχουμε επομέ-

νως $\binom{10}{1}\binom{9}{5} = \binom{10}{1}\binom{9}{4}$ τρόπους.

(iv) Στην περίπτωση **MMM** έχουμε περισσέψει $6-0=6$ αχλάδια και $6-3=3$ μήλα. Έχουμε επομένως $\binom{10}{1}\binom{9}{6} = \binom{10}{1}\binom{9}{3}$ τρόπους.

Συνολικά λοιπόν, για την περίπτωση που ένα παιδί παίρνει 3 φρούτα, έχουμε

$$\binom{10}{1}\binom{9}{3} + \binom{10}{1}\binom{9}{4} + \binom{10}{1}\binom{9}{4} + \binom{10}{1}\binom{9}{3} = 840 + 1260 + 1260 + 840 = 4200 \text{ τρόπους.}$$

(β) Αν δώσουμε από ένα φρούτο σε δύο παιδιά, τότε 8 παιδιά θα έχουν από ένα φρούτο και δύο παιδιά θα έχουν από δύο. Ας βρούμε πώς μπορούμε να σχηματίσουμε αυτές τις δυάδες φρούτων. Με απλή δοκιμή βλέπουμε ότι αυτές είναι οι εξής:

AA-AA ή AA-AM ή MM-AA ή AM-AM ή MM-AM ή MM-MM

Αρχικά πρέπει να πούμε όπως και πριν, ότι τα 2 παιδιά μπορούμε να τα πάρουμε από τα 10 με $\binom{10}{2}$

τρόπους. Ανάλογα τώρα με την περίπτωση πρέπει να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούμε να δώσουμε τα υπόλοιπα $12-4=8$ φρούτα στα υπόλοιπα $10-2=8$ παιδιά.

(i) Ξεκινάμε με την περίπτωση **AA-AA**. Εδώ τα δύο παιδιά παίρνουν από 2 μήλα.

Κατανομή των 4 φρούτων, από 2 στο κάθε παιδί.		Πλήθος αχλαδιών και μήλων που περισσεύουν	
AA	AA	A	M
		2	6

Διαλέγουμε 2 παιδιά για να τα δώσουμε τα 2 αχλάδια. Τα άλλα 6 παιδιά θα πάρουν τα 6 μήλα που περισσεύουν. Όπως υποδηλώνει και ο πίνακας, η κατανομή μπορεί να γίνει με

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{6} = \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} = 1260 \text{ τρόπους.}$$

Τονίζουμε εδώ ότι αφού οι ομάδες AA και AA είναι ίδιες, δεν έχει καμία σημασία ποια ομάδα θα πάει στο καθένα από τα 2 παιδιά.

(ii) Παίρνουμε την περίπτωση **AA-AM**. Εδώ τα δύο παιδιά παίρνουν από 2 μήλα.

Κατανομή των 4 φρούτων, από 2 στο κάθε παιδί.		Πλήθος αχλαδιών και μήλων που περισσεύουν	
AA	AM	A	M
		3	5

Διαλέγουμε 3 παιδιά για να τα δώσουμε τα 3 αχλάδια. Τα άλλα 5 παιδιά θα πάρουν τα 5 μήλα που

περισσεύουν. Όπως υποδηλώνει και ο πίνακας, η κατανομή μπορεί να γίνει τώρα με

$$\binom{10}{2} \cdot 2! \binom{8}{3} \binom{5}{5} = \binom{10}{2} \cdot 2! \binom{8}{3} = 5040 \text{ τρόπους.}$$

Τονίζουμε εδώ ότι αφού οι ομάδες AA και AM δεν είναι ίδιες, έχει σημασία ποια ομάδα θα πάει στο καθένα από τα 2 παιδιά. Αυτό γίνεται όμως με $2!$ και για τον λόγο αυτό στο παραπάνω γινόμενο εμφανίζεται ο παράγοντας $2!$.

Για τις άλλες περιπτώσεις εργαζόμαστε εντελώς ανάλογα και παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα:

Κατανομή των 4 φρούτων, από 2 στο κάθε παιδί.		Πλήθος αχλαδιών και μήλων που περισσεύουν		Τρόποι που μοιράζονται τα υπόλοιπα αχλάδια και τα υπό- λοιπα μήλα στα 8 παιδιά
AA	MM	4	4	$\binom{10}{2} 2! \binom{8}{4} \binom{4}{4} = \binom{10}{2} 2! \binom{8}{4} = 6300$
AM	AM	4	4	$\binom{10}{2} \binom{8}{5} \binom{4}{4} = \binom{10}{2} \binom{8}{5} = \binom{10}{2} \binom{8}{3} = 3150$
AM	MM	5	3	$\binom{10}{2} 2! \binom{8}{5} \binom{3}{3} = \binom{10}{2} 2! \binom{8}{5} = \binom{10}{2} 2! \binom{8}{3} = 5040$
MM	MM	6	2	$\binom{10}{2} \binom{8}{6} \binom{2}{2} = \binom{10}{2} \binom{8}{6} = \binom{10}{2} \binom{8}{2} = 1260$

Σημειώνουμε και εδώ ότι στις περιπτώσεις AM – AM και MM – MM δεν πολλαπλασιάζουμε με $2!$, αφού οι δύο ομάδες φρούτων είναι ίδιες στην κάθε περίπτωση.

Συνολικά, σε αυτή την περίπτωση που δύο παιδιά παίρνουν από 2 φρούτα έχουμε

$$1260 + 5040 + 6300 + 1260 + 5040 + 3150 = 22050 \text{ τρόπους.}$$

Από την προσθετική αρχή συμπεραίνουμε ότι τα 12 φρούτα μπορούν να δοθούν στα 10 παιδιά, έτσι ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον ένα φρούτο, με $4200 + 22050 = 26250$ τρόπους.

Πρόβλημα 6.14 (Συνδυασμοί)

Είναι προφανές ότι η μία ομάδα θα έχει 2 ακριβώς αντικείμενα και οι υπόλοιπες 8 από ένα.

Επιλέγουμε λοιπόν 2 αντικείμενα από τα 10 με $\binom{10}{2}$ τρόπους και σχηματίζουμε την μία ομάδα. Τα

υπόλοιπα 8 αντικείμενα σχηματίζουν τις υπόλοιπες 8 ομάδες με έναν τρόπο, αφού η διάταξη των ομάδων δεν παίζει ρόλο.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα 10 αντικείμενα χωρίζονται σε 9 ομάδες με

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ τρόπους.}$$

Σχόλια

(α) Γενικά, n αντικείμενα τοποθετούνται σε $n-1$ μη διατεταγμένες ομάδες, το καθένα σε μία μόνο ομάδα, με $\binom{n}{2}$ τρόπους.

Εντελώς ανάλογα, ένα σύνολο A με n στοιχεία μπορεί να γραφεί ως ένωση $n-1$ ξένων ανά δύο μη κενών υποσυνόλων του με $\binom{n}{2}$ τρόπους.

(β) Ακόμα πιο γενικά, το παραπάνω πρόβλημα είναι μια ειδική περίπτωση των αριθμών Stirling δευτέρου είδους. Ας θυμίσουμε ότι:

Οι **αριθμοί Stirling δευτέρου είδους** $S(n, k)$ είναι οι αριθμοί που δείχνουν το πλήθος, με το οποίο μπορούμε ένα σύνολο A με n στοιχεία να το γράψουμε ως ένωση k υποσυνόλων του A που είναι μη κενά και ξένα και ανά δύο.

Οι αριθμοί αυτοί έχουν αρκετές σημαντικές ιδιότητες, μία από τις οποίες είναι ότι ικανοποιούν την αναγωγική σχέση

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$$

Πρόβλημα 6.15 (Αρχές συνδυαστικής – Συνδυασμοί)

Ας εφαρμόσουμε την προσθετική αρχή με κριτήριο το χρώμα μιας από τις δύο μπάλες, πχ της μπάλας που εξάγουμε πρώτη.

♦ Έστω ότι η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη. Αυτή εξάγεται με 3 τρόπους, όσες είναι και οι κόκκινες μπάλες. Την άλλη μπάλα θα την πάρουμε από τις υπόλοιπες $4+7=11$ αφού έχουμε στη διάθεσή μας 4 μπλε και 7 πράσινες. Συνολικά λοιπόν, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $3 \cdot 11 = 33$ περιπτώσεις.

♦ Έστω ότι η πρώτη μπάλα είναι μπλε. Αυτή εξάγεται με 4 τρόπους, όσες είναι και οι μπλε μπάλες. Την άλλη μπάλα θα την πάρουμε από τις υπόλοιπες $3+7=10$ αφού έχουμε στη διάθεσή μας 3 κόκκινες και πράσινες μπάλες. Συνολικά λοιπόν, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $3 \cdot 10 = 30$ περιπτώσεις.

♦ Έστω ότι η πρώτη μπάλα είναι πράσινη. Αυτή εξάγεται με 7 τρόπους, όσες είναι και οι πράσινες μπάλες. Την άλλη μπάλα θα την πάρουμε από τις υπόλοιπες $3+4=7$, αφού έχουμε στη διάθεσή μας 3 κόκκινες και 4 μπλε μπάλες. Συνολικά λοιπόν, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $7 \cdot 7 = 49$ περιπτώσεις.

Από την προσθετική αρχή συμπεραίνουμε ότι θα έχουμε $33+30+49=122$ περιπτώσεις.

Επειδή όμως δεν μας ενδιαφέρει η σειρά που εξάγουμε τις δύο μπάλες και επειδή καθεμία από τις

παραπάνω περιπτώσεις έχει μετρηθεί δύο φορές (πχ K1M1 αλλά και M1K1, όπου K1 και M1 είναι αντιστοιχα η πρώτη κόκκινη και η πρώτη μπλε μπάλα), η ζητούμενος αριθμός είναι

$$\frac{33+30+49}{2} = \frac{122}{2} = 61.$$

Άλλος τρόπος

Έχουμε συνολικά $3+4+7=14$ μπάλες. Από αυτές μπορούμε να εξάγουμε δύο με

$$\binom{14}{2} = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91 \text{ τρόπους.}$$

Μέσα όμως σε αυτούς τους τρόπους έχουμε και εκείνους που οι δύο μπάλες έχουν το ίδιο χρώμα. Αυτές τις περιπτώσεις πρέπει να τις αφαιρέσουμε. Όμως:

♦ Δύο κόκκινες μπάλες μπορούμε να εξάγουμε από τις 3 κόκκινες με $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$ τρόπους.

♦ Δύο μπλε μπάλες μπορούμε να εξάγουμε από τις 4 μπλε με $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ τρόπους.

♦ Δύο πράσινες μπάλες μπορούμε να εξάγουμε από τις 7 πράσινες με $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ τρόπους.

Από της αρχή της συμπληρωματικής αρίθμησης συμπεραίνουμε ότι έχουμε

$$91 - 3 - 6 - 21 = 91 - 30 = 61 \text{ τρόπους}$$

Πρόβλημα 6.16 (Κατανομή ανόμοιων αντικειμένων σε διαφορετικά κελιά)

Αρχικά παρατηρούμε ότι έχουμε 5 διαφορετικά βιβλία και προφανώς τα παιδιά είναι διαφορετικά. Είναι $5 = 1 + 1 + 3 + 2 + 2 + 1$. Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις:

(α) Δύο παιδιά παίρνουν από 1 βιβλίο και ένα παιδί παίρνει 2 βιβλία.

Το παιδί που παίρνει ένα βιβλίο το επιλέγουμε με 3 τρόπους, όσα είναι και τα παιδιά (ή διότι $\frac{3!}{2!} = 3$,

αφού το 2 στον παρονομαστή δηλώνει ότι έχουμε δύο ίδιες ομάδες, αυτές που θα πάρουν από 1 βιβλίο).

Στα 3 τώρα παιδιά τα 5 βιβλία δίνονται ως $1+1+3$ με

$$\binom{5}{1, 1, 3} = \frac{5!}{1!1!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{6} = 20 \text{ τρόπους.}$$

Από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει η διανομή στην περίπτωση μας γίνεται με $3 \cdot 20 = 60$ τρόπους.

β) Δύο παιδιά παίρνουν από 2 βιβλίο και ένα παιδί παίρνει 1 βιβλίο.

Το παιδί που παίρνει ένα βιβλίο το επιλέγουμε με 3 τρόπους, όσα είναι και τα παιδιά (ή διότι $\frac{3!}{2!} = 3$, αφού το 2 στον παρονομαστή δηλώνει ότι έχουμε δύο ίδιες ομάδες, αυτές που θα πάρουν από 2

βιβλία). Στα 3 τώρα παιδιά τα 5 βιβλία δίνονται ως $2+2+1$ με

$$\binom{5}{2, 2, 1} = \frac{5!}{2!2!1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 2} = 30 \text{ τρόπους.}$$

Τέλος, από την προσθετική αρχή συμπεραίνουμε ότι συνολικά η διανομή γίνεται με $60 + 90 = 150$ τρόπους.

Άλλος τρόπος

Από τη θεωρία στα μοντέλα κατάληψης γνωρίζουμε ότι η διαφορετικά αντικείμενα κατανέμονται σε m διαφορετικά κελιά, χωρίς κανένα κελί να μείνει άδειο, με:

$$R(n, m) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n \text{ τρόπους.}$$

Εδώ έχουμε $n=5$ και $m=3$. Επομένως το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$\begin{aligned} R(5, 3) &= \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} (3-k)^5 = \binom{3}{0} (3-0)^5 - \binom{3}{1} (3-1)^5 + \binom{3}{2} (3-2)^5 - \binom{3}{3} (3-3)^5 = \\ &= 243 - 96 + 3 = 246 - 96 = 150 \end{aligned}$$

Σχόλιο

Ο παραπάνω τύπος

$$F(n, m) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

δίνει επίσης το πλήθος των **επί** συναρτήσεων από ένα σύνολο A με n στοιχεία σε ένα σύνολο B με m στοιχεία.

Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέγεται **επί**, όταν το σύνολο τιμών της είναι το B .

Πρόβλημα 6.17 (Κυκλικές μεταθέσεις)

Όλοι μαζί θα είμαστε στο πάρτι 10 άτομα. Εγώ με τους δύο συναδέλφους σχηματίζουμε μια ομάδα, ένα εικονικό δηλαδή άτομο E . Το άτομο E και οι υπόλοιποι $10-3=7$, δηλαδή 8 άτομα, μπορούν να καθίσουν στο κυκλικό τραπέζι με $7!$ τρόπους. Εγώ με τους δύο συναδέλφους μπορούμε να καθίσουμε με 2 τρόπους, αφού εγώ θα είμαι στη μέση και δεξιά μου θα κάθεται ή Άννα ή ο Βασίλης.

Επομένως, στο τραπέζι αυτό μπορούμε να καθίσουμε με $2 \cdot 7!$ τρόπους.

Σχόλιο

Θυμίζουμε ότι n άτομα μπορούν καθίσουν γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι με $(n-1)!$ τρόπους.

Κάθε τέτοια μετάθεση λέγεται **κυκλική μετάθεση**.

Πρόβλημα 6.18 (Διατάξεις- Επαναληπτικές μεταθέσεις)

(α) Εδώ τα ψηφία του 4-ψήφιου αριθμού είναι διαφορετικά Πρόκειται λοιπόν για τις διατάξεις των 5 στοιχείων ανά 4 και το πλήθος τους είναι

$$(5)_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$$

Άλλος τρόπος

Μπορούμε φυσικά να εργαστούμε και κατευθείαν με την πολλαπλασιαστική αρχή, αφού κάθε τέτοιος αριθμός έχει τη μορφή ΧΕΔΜ και:

X	E	Δ	M
5	4	3	2

♦ Για τη θέση X των χιλιάδων έχουμε 5 δυνατότητες, όσα είναι και τα περιττά ψηφία.

♦ Για τη θέση E των εκατοντάδων έχουμε 4 δυνατότητες, αφού ήδη έχουμε χρησιμοποιήσει το ένα ψηφίο.

♦ Για τη θέση Δ των δεκάδων έχουμε $5-2=3$ δυνατότητες, αφού ήδη έχουμε χρησιμοποιήσει τα δύο ψηφία..

♦ Για τη θέση M των εκατοντάδων έχουμε $5-3=2$ δυνατότητες, αφού ήδη έχουμε χρησιμοποιήσει τα τρία ψηφία..

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή σχηματίζονται $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ αριθμοί.

(β) Εδώ επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων, οπότε έχουμε διατάξεις με επανάληψη των 5 στοιχείων ανά 4.

Το πλήθος αυτών των διατάξεων είναι $\langle 5 \rangle_4 = 5^4 = 625$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και με την πολλαπλασιαστική αρχή, αφού για την κάθε θέση του αριθμού ΧΕΔΜ έχουμε 5 δυνατότητες.

X	E	Δ	M
5	5	5	5

(γ) Εδώ έχουμε αριθμούς με 6 ψηφία που περιέχουν όλα τα δοσμένα περιττά ψηφία, τα οποία είναι 5. Ένα επομένως ψηφίο από τα 5 θα επαναληφθεί ακριβώς μία φορά.

Το ψηφίο αυτό μπορούμε να το επιλέξουμε με 5 τρόπους.

Βάζοντας αυτό το ψηφίο στα 5 ψηφία έχουμε έναν αριθμό με 6 ψηφία, δύο από τα οποία είναι ίδια.

Το πλήθος αυτών των αριθμών είναι όσες οι μεταθέσεις με επανάληψη $\binom{6}{1, 1, 1, 1, 2}$ και το πλήθος

τους είναι:

$$\binom{6}{1, 1, 1, 1, 2} = \frac{6!}{1!1!1!1!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 360.$$

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, σχηματίζονται $5 \cdot 360 = 1800$ αριθμοί.

(δ) Για να είναι οι αριθμοί αυτοί με τα 4 περιττά και διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία πολλαπλάσια του 3, πρέπει και αρκεί το άθροισμα των ψηφίων τους να είναι αριθμός πολλαπλάσιο του 3.

Αφού τα ψηφία είναι τα 1, 3, 5, 7, 9, οι μόνες περιπτώσεις είναι οι εξής:

$$\{1, 3, 5, 9\} \text{ και } \{3, 5, 7, 9\}$$

Με άθροισμα ψηφίων αντίστοιχα ίσο με $18 = 3 \cdot 6$ και $24 = 3 \cdot 8$

Στην κάθε περίπτωση σχηματίζονται $4! = 24$ αριθμοί, οπότε συνολικά σχηματίζονται $24 + 24 = 48$ αριθμοί.

Πρόβλημα 6.19 (Συνδυασμοί)

(α) Αφού δεν μας ενδιαφέρει η σειρά που θα επιλεγούν τα 5 παιδιά, είναι φανερό ότι πρόκειται για συνδυασμούς..

♦ Από τα 7 αγόρια μπορούμε να επιλέξουμε 3 με $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ τρόπους.

♦ Από τα 5 κορίτσια μπορούμε να επιλέξουμε 2 με $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ τρόπους.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, η 5-μελής ομάδα μπορεί να σχηματιστεί με

$$35 \cdot 10 = 350 \text{ τρόπους.}$$

(β) Έχουμε βρει στο πρώτο ερώτημα ότι οι 5-μελείς ομάδες με 3 αγόρια και 2 κορίτσια μπορούν να σχηματιστούν με 350 τρόπους. Στο ερώτημα όμως αυτό δεν θέλουμε ο Σάκης και ο Τάκης να είναι συγχρόνως στην ίδια ομάδα. Προφανώς, ίσως να μην είναι σε καμία, αλλά αυτό δεν μας ενδιαφέρει στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Πρέπει λοιπόν να βρούμε αρχικά σε πόσες ομάδες βρίσκονται συγχρόνως ο Σάκης και ο Τάκης και τον αριθμό αυτό να τον αφαιρέσουμε από το 350.

Αφού τα δύο αυτά αγόρια είναι στην ομάδα, λείπει ένα ακόμα αγόρι από τα 3 που θα είναι στην ομάδα. Αυτό το επιλέγουμε από τα υπόλοιπα $7 - 2 = 5$ αγόρια με $\binom{5}{1} = 5$ τρόπους, κάτι που είναι άλλωστε προφανές.

Τα 2 κορίτσια, τα επιλέγουμε, όπως στο πρώτο ερώτημα, με $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ τρόπους.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των ομάδων, στις οποίες συμμετέχουν συγχρόνως ο Τάκης και ο Σάκης είναι $5 \cdot 10 = 50$.

Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της συμπληρωματικής απαρίθμησης, σχηματίζονται:

$$350 - 50 = 300 \text{ ομάδες,}$$

στις οποίες το πολύ ένας από τα αγόρια Σάκης και Τάκης είναι στην ομάδα που θα επιλεγεί.

Πρόβλημα 6.20 (Χωρισμός σε ομάδες)

Αφού οι 4 μαθητές θα πάρουν από 2 βιβλία, δηλαδή θα πάρουν τα 8 βιβλία, οι υπόλοιποι $7 - 4 = 3$ μαθητές θα πάρουν τα υπόλοιπα $20 - 8 = 12$ βιβλία. Επομένως ο καθένας από τους 3 μαθητές θα πάρει 4 βιβλία.

Θα βρούμε πρώτα με πόσους τρόπους μπορούν να χωριστούν τα 20 βιβλία σε 4 μη διατεταγμένες ομάδες των 2 και 3 μη διατεταγμένες ομάδες των 4 βιβλίων.

Αυτό, σύμφωνα με τη θεωρία, γίνεται με

$$\frac{20!}{\underbrace{2!2!2!2!}_{4\text{-ομάδες}} \cdot \underbrace{4!4!4!}_{3\text{-ομάδες}} \cdot 4! \cdot 3!} = \frac{20!}{(2!)^4 4! \cdot (4!)^3 3!}.$$

Αυτές όμως οι ομάδες βιβλίων μπορούν να δοθούν σε 7 μαθητές, με $7!$ τρόπους. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή η διανομή των βιβλίων μπορεί να γίνει με

$$N = \frac{20!}{(2!)^4 4! \cdot (4!)^3 3!} \cdot 7! = \frac{20!}{(2!)^4 \cdot (4!)^4} \cdot \frac{7!}{3!} \text{ τρόπους.}$$

Επειδή $\frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 21 \cdot 40$, ο παραπάνω αριθμός γράφεται και ως

$$N = 40 \cdot \frac{21!}{(2!)^4 \cdot (4!)^4} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 21!}{2 \cdot 8 \cdot (4!)^4} = \frac{5 \cdot 21!}{2 \cdot (4!)^4}$$

Πρόβλημα 6.21 (Κυκλικές μεταθέσεις)

(α) Αφού δεν υπάρχουν περιορισμοί και έχουμε 15 άτομα, αυτά θα καθίσουν γύρω από το κυκλικό τραπέζι με $(15-1)! = 14!$ τρόπους, όσες είναι δηλαδή και οι κυκλικές μεταθέσεις 15 στοιχείων.

(β) Τα αγόρια τα βλέπουμε ως μία ομάδα A. Η ομάδα αυτή A και τα 5 κορίτσια σχηματίζουν ένα σύνολο με 6 στοιχεία. Τα 6 αυτά στοιχεία κάθονται γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι με $(6-1)! = 5! = 120$ τρόπους. Αλλά μέσα στην ομάδα τους τα 10 αγόρια εναλλάσσονται με $10!$ τρόπους. Υπάρχουν λοιπόν $5!10!$ τρόποι για να καθίσουν τα παιδιά με αυτούς τους περιορισμούς.

(γ) Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν κορίτσια που κάθονται σε διαδοχικές θέσεις. Αυτό σημαίνει ότι ανάμεσα σε δύο κορίτσια παρεμβάλλεται πάντα ένα τουλάχιστον αγόρι.

Βάζουμε λοιπόν να καθίσουν πρώτα τα 10 αγόρια. Αυτό γίνεται με $(10-1)! = 9!$ Τρόπους.

Τα 10 αγόρια σχηματίζουν γύρω από το τραπέζι 10 κενά (και όχι 11 που σχηματίζουν αν καθίσουν σε ευθεία!). Διαλέγουμε λοιπόν 5 από τα 10 αυτά κενά, κάτι που γίνεται με $\binom{10}{5}$ τρόπους. Σε αυτά τα

5 κενά τα κορίτσια κάθονται με $5!$ τρόπους.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή απαρίθμησης, συμπεραίνουμε ότι τα παιδιά θα καθίσουν γύρω από το τραπέζι με $9! \binom{10}{5} \cdot 5!$ τρόπους.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι σε 5 από τα 10 κενά που σχηματίζονται από τα αγόρια, τα 5 κορίτσια μπορούν να καθίσουν με $(10)_5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ τρόπους, όσες είναι δηλαδή και οι διατάξεις 10 στοιχείων ανά 5. Προφανώς

$$\binom{10}{5} \cdot 5! = \frac{10!}{5!5!} \cdot 5! = \frac{10!}{5!} = \frac{10!}{(10-5)!} = (10)_5$$

και έτσι καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Πρόβλημα 6.22 (Μεταθέσεις)

(α) Αφού κάθε σημαία έχει 3 λουρίδες, είτε θα έχει 1 λουρίδα από κάθε χρώμα ή θα έχει 2 λουρίδες του ίδιου χρώματος και μία ενός από τα δύο άλλα χρώματα. Θα εφαρμόσουμε λοιπόν με αυτό το κριτήριο την προσθετική αρχή

(i) Έστω ότι η σημαία έχει 3 λουρίδες διαφορετικού χρώματος. Με 3 τέτοιες, δηλαδή διαφορετικού χρώματος, λουρίδες μπορούν να γίνουν $3! = 6$ σημαίες, αφού έχει σημασία η διάταξη των λουρίδων.



(ii) Έστω τώρα ότι η σημαία έχει δύο λουρίδες του ίδιου χρώματος και μία με διαφορετικό χρώμα.

Τις δύο λουρίδες με το ίδιο χρώμα (πχ Κ) τα παιδιά μπορούν να τις επιλέξουν με 3 τρόπους, όσα είναι και τα χρώματα των λουρίδων.

Αφού επιλέξουν τις δύο ίδιες λουρίδες (Κ), μένει να πάρουν και μία λουρίδα από τα άλλα δύο χρώματα (Π ή Α).

Αυτό μπορεί να γίνει με 2 τρόπους. Αλλά τώρα δύο λουρίδες του ίδιου χρώματος (Κ) και μία λουρίδα άλλου χρώματος (πχ Π) μπορούν να μπουνέ σε σειρά με 3 τρόπους, αφού πχ η πράσινη λουρίδα έχει τρεις δυνατότητες, όσες είναι δηλαδή οι διαθέσιμες θέσεις για να μπουνέ οι 3 λουρίδες κάθε σημαίας. Οι δύο κόκκινες έχουν μόνο μία δυνατότητα, διότι έχουν το ίδιο χρώμα.



Μπορούμε φυσικά να βρούμε και διαφορετικά ότι τα χρώματα Κ-Κ-Π θα δώσουν $\frac{3!}{2!} = 3$ σημαίες, όσες δηλαδή είναι οι μεταθέσεις με επανάληψη $\binom{3}{2,1}$, το πλήθος των οποίων είναι:

$$\binom{3}{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Από την πολλαπλασιαστική αρχή, στην περίπτωση αυτή, σχηματίζονται $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ σημαίες.

Τέλος, από την προσθετική αρχή συμπεραίνουμε ότι τα παιδιά μπορούν συνολικά να φτιάξουν $3 + 18 = 24$ σημαίες.

(β) Τώρα κάθε σημαία έχει 5 λουρίδες. Όμως $5 = 2 + 2 + 1$. Χωρίζουμε τις 5 λουρίδες σε τρεις μη διατεταγμένες ομάδες με 2,2,1 στοιχεία η καθεμιά. Αυτό γίνεται με $\frac{5!}{2!2!1!2!} = \frac{120}{8} = 15$ τρόπους. Την κά-

θε ομάδα θα τη δώσουμε τώρα σε 3 διαφορετικά χρώματα για να βαφεί. Αυτό γίνεται με $\frac{5!}{2!2!1!2!} \cdot 3! = \frac{120}{8} \cdot 6 = 15 \cdot 6 = 90$ τρόπους.

Επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε 90 διαφορετικές σημαίες, με τη σειρά των λουρίδων να έχουν σημασία.

Εδώ στην ουσία είναι ως να έχουμε 5 άτομα που τα χωρίζουμε σε ομάδες με 2,2,1 μέλη στην καθεμιά και τις ομάδες αυτές τις στέλνουμε σε 3 αποστολές. Το ίδιο ακριβώς πρόβλημα είναι ως να θέλουμε να

δώσουμε 5 διαφορετικά τετράδια (λουρίδες) σε 3 παιδιά (χρώματα) και το κάθε παιδί (χρώμα) να πάρει 2,2,1 τετράδια(λουρίδες) αντίστοιχα.

Προφανώς το παραπάνω πρόβλημα έχει σημεία που χρήζουν προσοχής.

Ας δούμε τι μας είπε το GPT !

(β) Κάθε σημαία έχει 5 λουρίδες

Έχουμε πάλι 2 Α, 2 Κ, 2 Π διαθέσιμες.

Κάθε σημαία πρέπει να έχει συνολικά 5 λουρίδες, άρα κάποιο χρώμα θα εμφανιστεί 2 φορές, ένα άλλο επίσης 2 φορές, και ένα τρίτο 1 φορά.

Παράδειγμα: ΑΑΚΚΠ.

1ο βήμα – Επιλογή του χρώματος που θα εμφανιστεί μία φορά

Έχουμε 3 επιλογές:

- Μία Α
- Μία Κ
- Μία Π

Άρα 3 επιλογές.

2ο βήμα – Πλήθος διατάξεων κάθε περίπτωσης

Ας θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα:

ΑΑΚΚΠ (δηλαδή 2 Α, 2 Κ, 1 Π).

Ο αριθμός διαφορετικών διατάξεων είναι:

$$\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{120}{4} = 30$$

Κάθε μία από τις 3 επιλογές του μοναδικού χρώματος (Α, Κ, Π) δίνει 30 σημαίες.

✓ **Σύνολο για (β):**

$$3 \times 30 = 90$$

Πρόβλημα 6.23 (Κυκλικές Μεταθέσεις)

Τοποθετούμε πρώτα τα κορίτσια. Αυτά κάθονται γύρω από το κυκλικό τραπέζι με $(5-4)! = 4!$ τρόπους.

Τα 5 κορίτσια σχηματίζουν στον κύκλο 5 κενά. Στα 5 αυτά κενά τα 5 αγόρια θα καθίσουν με $5!$ τρόπους.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε συνολικά $4! \cdot 5! = 24 \cdot 120 = 2880$ τρόπους.

Πρόβλημα 6.24 (Μεταθέσεις)

Σε κάθε τοποθέτηση θα πρέπει να υπάρχει ο σχηματισμός ΚΑΑΑΚ, όπου με Α συμβολίζουμε τις θέσεις που κάθεται αγόρι και με Κ τις θέσεις που κάθεται κορίτσι. Ο σχηματισμός αυτός δεν μπορεί να

παρουσιαστεί δεύτερη φορά, αφού τα κορίτσια είναι μόνο 2.

Ο σχηματισμός αυτός περιέχει 5 στοιχεία και όλα τα παιδιά είναι 9. Οι άλλες θέσεις στην 9-άδα είναι φανερό ότι θα καλυφθούν από τα υπόλοιπα $7 - 3 = 4$ αγόρια.

Θέσεις →	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(α)	K	A	A	A	K	A	A	A	A
(β)	A	K	A	A	A	K	A	A	A
(γ)	A	A	K	A	A	A	K	A	A
(δ)	A	A	A	K	A	A	A	K	A
(ε)	A	A	A	A	K	A	A	A	K

Όπως δείχνει και ο πίνακας υπάρχουν 5 τρόποι να μπει στην 9-άδα ο σχηματισμός KAAK. Σε καθέναν από αυτούς τα δύο κορίτσια εναλλάσσονται με $2! = 2$ τρόπους και τα 7 αγόρια με $7!$ τρόπους. Τα υπόλοιπα 4 αγόρια κάθονται με $4!$ τρόπους. Τα υπόλοιπα 4 αγόρια κάθονται με $4!$ τρόπους. Τα κορίτσια εναλλάσσονται με $2!$ τρόπους.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι θα πάρουμε $2 \cdot 5 \cdot 7!$ τρόπους να καθίσουν τα 9 παιδιά με τον συγκεκριμένο τρόπο.

Σημείωση

Δεν μπορούμε να πούμε ότι το πλήθος των τρόπων που ζητάμε είναι $5 \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4!$ προβάλλοντας την αιτιολογία ότι τα αγόρια μέσα στον σχηματισμό κάθονται με $3!$ τρόπους και τα υπόλοιπα 4 κάθονται με $4!$ τρόπους.

Αυτό δεν ευσταθεί γιατί όλα τα παιδιά έρχονται και κάθονται με προκαθορισμένη τη δομή (τις θέσεις) στην κάθε περίπτωση, δομή που περιέχει φυσικά τον σχηματισμό KAAK.

Για παράδειγμα, η πρώτη περίπτωση έχει τη μορφή:

Θέσεις	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	K	A	A	A	K	A	A	A	A

Στις θέσεις με K θα καθίσουν τα δύο κορίτσια με $2!$ τρόπους και στις 7 άλλες θέσεις τα αγόρια με $7!$ τρόπους.

Η κατάληψη αυτών των θέσεων θα γίνει με $2! \cdot 7!$ τρόπους και όχι με $2! \cdot 3! \cdot 4!$.

Άλλος τρόπος

Αφήνουμε πρώτα να καθίσουν τα αγόρια. Αυτά δημιουργούν 8 κενά. Ας ονομάσουμε $1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15$ τις 7 θέσεις των αγοριών και τα κενά.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
—	A	—	A	—	A	—	A	—	A	—	A	—	A	—

Αφού θέλουμε ανάμεσα στα δύο κορίτσια να κάθονται 3 αγόρια, τα κορίτσια μπορούν να καθίσουν μόνο στις θέσεις (1,7), (3,9), (5,11), (7,13), (9,15).

Βλέπουμε ότι δημιουργούνται 5 περιπτώσεις για να καθίσουν τα παιδιά. Για κάθε μία από αυτές τα κορίτσια έχουν δύο θέσεις για να καθίσουν ενώ τα αγόρια 7.

Η κάλυψη των θέσεων αυτών γίνεται επομένως με $5 \cdot 2! \cdot 7! = 10 \cdot 7!$ τρόπους.

Άλλος τρόπος

Όπως και στην πρώτη λύση, ο σχηματισμός KAAAK εμφανίζεται μέσα στις 9 θέσεις με 5 τρόπους.

Θέσεις →	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(α)	K	A	A	A	K	A	A	A	A
(β)	A	K	A	A	A	K	A	A	A
(γ)	A	A	K	A	A	A	K	A	A
(δ)	A	A	A	K	A	A	A	K	A
(ε)	A	A	A	A	K	A	A	A	K

Ας δούμε τώρα μια άλλη σκέψη.

Παίρνουμε μια συγκεκριμένη από τις 5 που περιέχουν το σχηματισμό K-A-A-A-K. Βάζουμε τα δύο κορίτσια να καθίσουν πρώτα. Αυτό γίνεται με $2!$ τρόπους.

Επιλέγουμε στη συνέχεια 3 από τα 7 αγόρια για να τα βάλουμε ανάμεσα στα δύο κορίτσια. Αυτό γίνεται με $\binom{7}{3}$ τρόπους. Τοποθετούμε τα 3 αγόρια.

Η τριάδα αυτή των αγοριών εναλλάσσεται ανάμεσα στα δύο κορίτσια με $3!$ τρόπους.

Μένουν να καθίσουν και τα υπόλοιπα 4 άτομα. Αυτό γίνεται με $4!$ τρόπους.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή και επειδή έχουμε 5 παρόμοιες περιπτώσεις, τα 7 αγόρια και τα 2 κορίτσια κάθονται σε μια σειρά, έτσι ώστε τρία ακριβώς αγόρια ανάμεσα στα δύο κορίτσια, με:

$$5 \cdot \binom{7}{3} \cdot 2!3!4! = 5 \cdot \frac{7!}{3!4!} \cdot 2!3!4! = 10 \cdot 7! \text{ τρόπους.}$$

Στον τρόπο αυτό βλέπουμε ότι μετρήσαμε χωριστά τους τρόπους που κάθονται τόσο τα 3 αγόρια ανάμεσα στα δύο κορίτσια όσο και τους τρόπους που κάθονται και τα 4 αγόρια που απομένουν.

Αυτό γίνεται διότι από την αρχή του προβλήματος έχουμε ήδη επιλέξει τα 3 αγόρια που μπαίνουν ανάμεσα στα κορίτσια και το πλήθος αυτών των τρόπων επιλογής τους $\binom{7}{3}$ έχει ήδη προσμετρηθεί ως παράγοντας στο τελικό γινόμενο $5 \cdot \binom{7}{3} \cdot 2!3!4!$.

Πρόβλημα 6.25 (Επαναληπτικές Μεταθέσεις)

(α) Έχουμε 6 παιδιά και θέλουμε να τα χωρίσουμε σε δύο ομάδες των 3 ατόμων. Σε κάθε τέτοιο χωρισμό έχει σημασία η διάταξη των ομάδων, αφού τα ξενοδοχεία είναι διαφορετικά.

Ο χωρισμός λοιπόν μπορεί να γίνει με

$$\binom{6}{3,3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{3!4 \cdot 5 \cdot 6}{3!6} = 4 \cdot 5 = 20 \text{ τρόπους.}$$

Άλλος τρόπος

Για τον χωρισμό των 6 μαθητών στα δύο ξενοδοχεία μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής:

Επιλέγουμε πρώτα 3 από τα 6 παιδιά, κάτι που γίνεται με

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \text{ τρόπους}$$

για να πάνε στο ένα ξενοδοχείο υπόλοιπα 3 παιδιά πάνε υποχρεωτικά στο άλλο ξενοδοχείο.

Επομένως η κατανομή σε ξενοδοχεία γίνεται με 20 τρόπους.

(β) Ας αντιμετωπίσουμε το θέμα από την αρχή, βήμα - βήμα. Η επιλογή ξενοδοχείου γίνεται με

$$\binom{6}{3,3} = \frac{6!}{3!3!} \text{ τρόπους.}$$

Στη συνέχεια τα 3 παιδιά κάθε ξενοδοχείου επιλέγουν δωμάτια και αυτό με γίνεται με $3!$ τρόπους για την κάθε ομάδα μαθητών.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, η διανομή σε δωμάτια γίνεται με:

$$\frac{6!}{3!3!} \cdot 3!3! = 6! \text{ τρόπους.}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι το αποτέλεσμα $6!$ δείχνει το πλήθος των τρόπων, με τους οποίους τα 6 παιδιά μπορούν να επιλέξουν δωμάτιο, ανεξάρτητα από το ξενοδοχείο που θα διαμείνουν.

Πρόβλημα 6.26 (Πολλαπλασιαστική αρχή - Συμπληρωματική αρχή)

(α) Τα τρία παιδιά μπορούν να καθίσουν στις 3 από τις 6 καρέκλες με $(6)_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Πράγματι, το πρώτο παιδί έχει 6 δυνατότητες, όσες είναι και οι καρέκλες, το δεύτερο έχει 5 δυνατότητες, αφού η μία έχει ήδη καταληφθεί και το τρίτο έχει 4 δυνατότητες, αφού σε 2 από τις 6 καρέκλες έχουν ήδη καθίσει τρία παιδιά.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι έχουμε $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ τρόπους.

(β) Είδαμε στο πρώτο ερώτημα ότι τα τρία παιδιά μπορούν να καθίσουν στις 3 από τις 6 καρέκλες με $(6)_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ τρόπους.

Από αυτούς όμως τους τρόπους πρέπει να εξαιρέσουμε εκείνους που η Ελεονόρα (Ε) με την Ζηνοβία (Ζ) κάθονται μαζί, δηλαδή σε συνεχόμενες θέσεις.

Αν τα δύο κορίτσια τα δούμε ως ένα άτομο, τότε είναι σαν να πρόκειται σε 5 καρέκλες να καθίσουν 2 παιδιά. Πραγματικά, η Ελένη και η Ζηνοβία μπορούν να καθίσουν στις θέσεις 12, 23, 34, 45, 56, κάτι που φαίνεται καθαρά και στο βοηθητικό πίνακα.

Αυτό γίνεται με $5 \cdot 4$ τρόπους, αφού η ομάδα των κοριτσιών έχει 5 δυνατότητες και το άλλο παιδί 4 δυνατότητες. Στην ομάδα των κοριτσιών γίνονται 2 μεταθέσεις των θέσεων.

Σύμφωνα με τον πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε συνολικά

$$2 \cdot 5 \cdot 4 = 40 \text{ δυνατότητες.}$$

Σύμφωνα τώρα με την συμπληρωματική αρχή, έχουμε συνολικά $120 - 40 = 80$ τρόπους.

Σχόλιο

Παίρνουμε την Ελένη και την βάζουμε να καθίσει.

♦ Αν η Ελένη καθίσει στην 1^η ή στην 6^η καρέκλα, η Ζηνοβία έχει μόνο μία δυνατότητα να καθίσει δίπλα στην Ελένη.

1	2	3	4	5	6
EZ	—	—	—	—	—
—	EZ	—	—	—	—
—	—	EZ	—	—	—
—	—	—	EZ	—	—
—	—	—	—	EZ	—

1	2	3	4	5	6
E	Z	■	■	Z	E

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

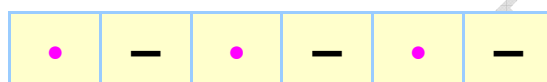
♦ Αν η Ελένη καθίσει σε μία από τις θέσεις 2,3,4,5 τότε η Ζηνοβία έχει 2 δυνατότητες να καθίσει: ή αριστερά ή δεξιά από την Ελένη στην 1^η ή στην 6^η καρέκλα, η Ζηνοβία έχει μόνο μία δυνατότητα να καθίσει δίπλα στην Ελένη.

Z1	E	Z2	Z2	E	Z1
----	---	----	----	---	----

Στον πίνακα βλέπουμε αυτές τις δυνατότητές, αν η Ελένη καθίσει στη 2^η ή στην 5^η θέση.

Συνολικά έχουμε $1+2+2+2+2+1=10$ δυνατότητες. Αφού το 3^ο κορίτσι έχει πια 4 δυνατότητες για να καθίσει, συμπεραίνουμε ότι τα 3 παιδιά μπορούν να καθίσουν με αυτόν τον περιορισμό με $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ τρόπους.

(γ) Ας πάρουμε πρώτα 5 καρέκλες. Υπάρχει μόνο μια διάταξη των θέσεων, ώστε σε αυτές τα 3 κορίτσια να καθίσουν με τον δοσμένο τρόπο, δηλαδή ανάμεσά τους να υπάρχουν άδειες καρέκλες.



Μένει τώρα να βάλουμε και την 6^η καρέκλα. Η καρέκλα αυτή μπορεί να μπει με 4 τρόπους:

Αριστερά από το 1^ο κορίτσι, ανάμεσα στα δύο πρώτα κορίτσια, ανάμεσα στο δεύτερο και το τρίτο κορίτσι ή δεξιά από το τελευταίο κορίτσι.



Στον πίνακα βλέπουμε αυτές τις 4 θέσεις με το χαρακτηριστικό βέλος στα αντίστοιχα κελιά

Τα κορίτσια όμως εναλλάσσουν τις θέσεις τους με $3! = 6$ τρόπους.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν, τα παιδιά μπορούν να καθίσουν στις καρέκλες με τρόπο ώστε να μην υπάρχουν πουθενά δύο κορίτσια χωρίς άδεια καρέκλα ανάμεσά τους με $4 \cdot 6 = 24$ τρόπους.

Άλλος τρόπος

Αφήνουμε να καθίσουν τα 3 παιδιά. Αυτά δημιουργούν 4 κενά, δύο ανάμεσα και δύο κενά δεξιά αριστερά από τα παιδιά που κάθονται στις άκρες. Χωρίζουμε τα 3 παιδιά (τα συμβολίζουμε με $(*)$ με δύο καρέκλες (πχ $*|*|*$). Έχουμε χρησιμοποιήσει $3+2=5$ καρέκλες. Μένει να βάλουμε και την 6^η καρέκλα, δηλαδή αυτή που περισσεύει.

Αυτό γίνεται με 4 τρόπους. Αφού τα τρία κορίτσια εναλλάσσονται με $3! = 6$ τρόπους, συμπεραίνουμε από την πολλαπλασιαστική αρχή ότι έχουμε συνολικά $6 \cdot 4 = 24$ τρόπους.

Πρόβλημα 6.27 (Πολλαπλασιαστική αρχή - Συμπληρωματική αρχή)

(α) Πρόκειται για τις διατάξεις των 8 ανά 2 και το πλήθος τους είναι $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 120 = 6720$. Με τόσους τρόπους μπορούν επομένως να καθίσουν τα 5 παιδιά σε 8 θέσεις στη σειρά.

Ας σημειώσουμε ότι στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγούμαστε και με την πολλαπλασιαστική αρχή, διότι το

πρώτο παιδί έχει 8, το δεύτερο 7, το τρίτο 6, το τέταρτο 5 και το πέμπτο 4 δυνατότητες.

$$\text{Όμως } 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 120 = 6720.$$

Ας μην ξεχνάμε ότι ο τύπος $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ που δίνει το πλήθος των διατάξεων

των n ανά k είναι απλή εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής αρχής.

(β) Βάζουμε πρώτα να καθίσει ο Γιάννης.

Αν ο Γιάννης καθίσει στην 1^η ή στην 8^η θέση, τότε ο Δημήτρης έχει 1 δυνατότητα να καθίσει δίπλα στον Γιάννη.

Αν ο Γιάννης καθίσει στην 2^η, στην 3^η, ..., ή στην 7^η θέση, τότε ο Δημήτρης έχει $2 \times 6 = 12$ δυνατότητες να καθίσει δίπλα στον Γιάννη, αφού μπορεί να καθίσει τόσο αριστερά του όσο και δεξιά του.

Συνολικά έχουμε $1 + 1 + 2 \times 6 = 14$ δυνατότητες να καθίσουν ο Γιάννης με το Δημήτρη, δίπλα-δίπλα.

Σε καθεμία όμως από αυτές τις 8 περιπτώσεις, τα άλλα 3 παιδιά κάθονται με $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ τρόπους.

Σύμφωνα με τον πολλαπλασιαστική αρχή, θα πάρουμε $14 \times 120 = 1680$ τρόπους για να καθίσουν όλα τα παιδιά.

Άλλος τρόπος

Αν το Γιάννη (Γ) που κάθεται δίπλα στο Δημήτρη (Δ) τους δούμε ως ένα νέο άτομο Α, είναι ως να έχουμε 4 άτομα για να καθίσουν σε 7 θέσεις. Σημειώνουμε ότι έχουμε πια 7 θέσεις και όχι 8, ούτε όμως 6.

Αυτό φαίνεται και από το γεγονός ότι το ζεύγος πια ΓΔ μπορεί να καθίσει στις θέσεις

$$12 - 23 - 34 - 45 - 56 - 67 - 78$$

των οποίων το πλήθος είναι 7. Με 1, 2, 3, ..., 7, 8 έχουμε σημειώσει με τη σειρά τις 8 θέσεις.

Τα 4 λοιπόν άτομα μπορούν να καθίσουν στις 7 θέσεις με $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 42 \cdot 20 = 840$ τρόπους.

Αλλά τα δύο παιδιά Γιάννης και Δημήτρης αλλάζουν θέσεις μεταξύ τους με 2 τρόπους.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, παίρνουμε συνολικά $2 \cdot 840 = 1680$ τρόπους.

Άλλος τρόπος

Με χρήση συνδυασμών μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής.

Η ομάδα ΓΔ κάθεται με 7 τρόπους, κάτι που εξηγήσαμε σε προηγούμενη λύση.

Μένουν 6 θέσεις. Παίρνουμε από αυτές τις 3 με $\binom{6}{3}$ και σε αυτές τις 3 βιάζουμε να καθίσουν τα υ-

πόλοιπα 3 παιδιά. Αυτό όμως γίνεται με $3!$ τρόπους. Επειδή επιπλέον τα δύο παιδιά Γ και Δ εναλλάσσουν τις θέσεις τους με 2 τρόπους, συνολικά παίρνουμε από την πολλαπλασιαστική αρχή

$$2 \cdot 7 \cdot \binom{6}{3} \cdot 3! = 2 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{2!} = 14 \cdot 240 = 1680 \text{ τρόπους.}$$

(γ) Τα παιδιά Γιάννης και Δημήτρης κάθονται μαζί σε 1680 τρόπους. Συνολικά όμως τα 5 παιδιά κάθονται μαζί με 6720 τρόπους.

Από αυτές πρέπει επομένως να εξαιρέσουμε τις 1680 και έτσι το ζητούμενο πλήθος τρόπων είναι

$$6720 - 1680 = 5040.$$

(6) Ο Γιάννης και ο Δημήτρης σχηματίζουν το μπλόκο $\Gamma_ _ \Delta$ που καταλαμβάνει 4 θέσεις. Αυτό το μπλόκο μπορεί να εμφανιστεί στις 8 θέσεις με 5 τρόπους και συγκεκριμένα στις θέσεις:

$$1234 - 2345 - 3456 - 4567 - 5678.$$

Όμως κάθε μπλόκο δίνει 2 τρόπους που κάθονται οι Γ και Δ ($\Gamma\Delta$ ή $\Delta\Gamma$) και $(4)_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ που κάθονται τα υπόλοιπα 3 παιδιά στις 4 θέσεις που είναι διαθέσιμες για αυτά. Σύμφωνα λοιπόν με την πολλαπλασιαστική αρχή θα πάρουμε $5 \times 2 \times 24 = 240$ τρόπους.

Πρόβλημα 6.28 (Συνδυασμοί με επανάληψη)

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε 9 καρέκλες, τότε σε αυτές κάθονται με έναν τρόπο τα 5 παιδιά, αφού χρειαζόμαστε 5 καρέκλες για να καθίσουν τα ίδια και 4 καρέκλες για να τις βάλουμε ανάμεσα στα παιδιά, ώστε να μην υπάρχουν παιδιά που κάθονται δίπλα-δίπλα.

Επειδή έχουμε 12 καρέκλες, μένουν ακόμα $12 - 9 = 3$ καρέκλες. Αυτές θα τις βάλουμε στα 6 κενά που δημιουργούν οι 5 μαθητές.



Αλλά στα 6 κενά μπορούν να τοποθετηθούν 3 αντικείμενα (οι καρέκλες) με

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56 \text{ τρόπους.}$$

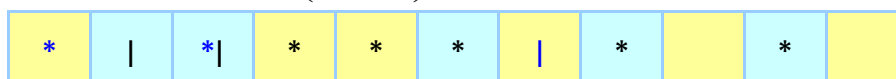
Επειδή τα 5 παιδιά εναλλάσσονται στις 5 θέσεις με $5! = 120$ τρόπους, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $56 \cdot 120 = 6720$ δυνατότητες.

Θυμίζουμε ότι n όμοια αντικείμενα μπορούν να τοποθετηθούν σε k κελιά με $\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} = \binom{k+n-1}{n}$ τρόπους.

Σχόλιο

Πρόκειται στην ουσία για συνδυασμούς με επανάληψη των n ανά k . Εδώ είναι $n=3$ και $k=6$. Το πλήθος τους βρίσκεται αν θεωρήσουμε σε μια σειρά n αστερίσκους που αντιπροσωπεύουν τα n όμοια αντικείμενα. Ανάμεσα στα n αστεράκια τοποθετούμε $k-1$ διαχωριστικές μπάρες και αυτά δημιουργούν k κενά (κελιά).

Ο σχηματισμός αυτών των $n+k-1$ συμβόλων αντιστοιχεί σε μια κατανομή. Το πλήθος όμως αυτών των σχηματισμών είναι όσο το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων δύο ειδών αντικειμένων, με n από το ένα είδος (τα $*$) και $k-1$ από το άλλο (τις μπάρες $|$). Το πλήθος αυτών των σχηματισμών είναι σύμφωνα με τη σχετική θεωρία ίσο με $\binom{k+n-1}{n}$.



Για παράδειγμα, όταν $n=3$ και $k=6$, τότε ο σχηματισμός του πίνακα αντιστοιχεί στην κατανομή

MMKKMM.

Πρόβλημα 6.29 (Γεύσεις από παγωτά)

Θέλουμε το παγωτό να έχει 3 μπάλες και οι γεύσεις είναι 7. Η κάθε γεύση μπορεί να επαναληφθεί μέχρι 3 φορές, όσες είναι οι μπάλες που πρέπει να έχει το παγωτό. Πρόκειται επομένως για συνδυασμούς με επανάληψη των 7 ανά 3. Το πλήθος αυτών των συνδυασμών είναι:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \binom{7+3-1}{3} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

Η κοπέλα μπορεί λοιπόν να φτιάξει το παγωτό με 84 διαφορετικούς τρόπους.

Πρόβλημα 6.30 (Συνδυαστική απόδειξη)

(α) Θα χρειαστούμε βασικά αλγεβρικές γνώσεις και τον τύπο για το πλήθος των συνδυασμών.

$$\begin{aligned} 3 \binom{n}{3} + 6n \binom{n}{2} + n^3 &= 3 \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 6n \frac{n(n-2)}{1 \cdot 2} + n^3 = \frac{n}{2} (n^2 - 3n + 2) + (6n^2 - 6n) + 2n^2 = \\ &= \frac{n}{2} (9n^2 - 6n - 3n + 2) = \frac{n}{2} (3n(3n-2) - (3n-2)) = \frac{n}{2} (3n-2)(3n-1) = \\ &= \frac{(3n)(3n-1)(3n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{3n}{3} \end{aligned}$$

Αυτή είναι η αλγεβρική απόδειξη.

(β) Ας δούμε τώρα μια εξαιρετική συνδυαστική απόδειξη. Μπορεί να μη γίνει σε κάθε σχολικό τμήμα στη Β ή στη Γ Λυκείου, όμως για το διδάσκοντα είναι πολύ σημαντικό να έχει στο μυαλό του πώς με χρήση της έννοιας του συνδυασμού ή άλλων εννοιών της συνδυαστικής μπορεί κάποιος να δώσει αποδείξεις που αφορούν κυρίως ταυτότητες στη συνδυαστική.

Ας εντοπίσουμε πρώτα ένα κατάλληλο πρόβλημα, στο οποίο θα δώσουμε δύο λύσεις, ανάλογα με τα δύο μέλη της ταυτότητας που θέλουμε να αποδείξουμε, δηλαδή της

$$\binom{3n}{3} = 3 \binom{n}{3} + 6n \binom{n}{2} + n^3$$

Θεωρούμε λοιπόν τρεις ομάδες καλλιτεχνών: μία ομάδα με n μουσικούς, μία με n τραγουδιστές και μία με n χορευτές.

Συνολικά έχουμε $3n$ άτομα, κάτι που το χρειαζόμαστε στο πρώτο μέλος $\binom{3n}{3}$.

Το πρώτο μέλος δηλώνει το πλήθος των συνδυασμών των $3n$ ατόμων ανά 3.

Ας έχουμε τώρα ως οδηγό το δεύτερο μέλος για να βρούμε με άλλο τρόπο πώς μπορούμε να βρούμε τους συνδυασμούς των $3n$ ατόμων ανά 3.

1ο Βήμα

Επιλέγουμε μία ομάδα από τις 3 με τρόπους. Από αυτήν επιλέγουμε 3 άτομα με $\binom{n}{3}$ τρόπους. Έχουμε έτσι επιλέξει $3\binom{n}{3}$ συνδυασμούς από τα $3n$ άτομα και προφανώς δεν υπάρχουν μόνο αυτοί οι συνδυασμοί.

2ο Βήμα

Επιλέγουμε 2 ομάδες από τις 3 για να πάρουμε 1 άτομο από τη μία και 2 άτομα από την άλλη. Οι ομάδες όμως πρέπει να είναι διατεταγμένες (αβ, βα, αγ, γα, βγ, γα) και έχουμε $3 \cdot 2 = 6$ δυνατότητες: 3 για τη μία ομάδα και 2 την άλλη.

Από τη μία ομάδα επιλέγουμε ένα άτομο με $\binom{n}{1}$ τρόπους και από την άλλη παίρνουμε 2 άτομα με $\binom{n}{2}$ τρόπους. Από την πολλαπλασιαστική αρχή παίρνουμε $6\binom{n}{1}\binom{n}{2}$ συνδυασμούς.

3ο Βήμα

Παίρνουμε ένα άτομο από καθεμιά εκ των τριών ομάδων. Με αυτό τον τρόπο σχηματίζονται

$$\binom{n}{1}\binom{n}{1}\binom{n}{1} = n \cdot n \cdot n = n^3 \text{ τριμελείς συνδυασμοί.}$$

Σύμφωνα με την προσθετική αρχή, μια και στα τρία βήματα έχουμε βρει ξένους μεταξύ τους συνδυασμούς, το πλήθος των συνδυασμών των $3n$ ατόμων ανά 3 είναι ίσο με

$$3\binom{n}{3} + 6\binom{n}{1}\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n}{1}\binom{n}{1} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$$

Αφού έχουμε απαριθμήσει και στις δύο περιπτώσεις το πλήθος των συνδυασμών των $3n$ ανά 3μ, συμπεραίνουμε ότι

$$\binom{3n}{3} = 3\binom{n}{3} + 6n\binom{n}{2} + n^3$$

Η απόδειξη στο σημείο αυτό έχει ολοκληρωθεί.

Πρόβλημα 6.31

(α) Το κάθε βιβλίο μπορεί να δοθεί σε ένα από τα 3 παιδιά, έχει δηλαδή 3 δυνατότητες. Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι τα 3 βιβλία μπορούν να δοθούν στα 3 παιδιά με $3^3 = 27$ τρόπους.

A	B	Γ
3	3	3

(β) Αφού κάθε παιδί θα πάρει βιβλίο, θέλουμε στην ουσία να μεταθέσουμε τα 3 βιβλία σε 3 άτομα. Έχουμε επομένως $3! = 6$ δυνατότητες.

(γ) Διαλέγουμε πρώτα το παιδί που δεν θα πάρει κανένα βιβλίο. Αυτό γίνεται με $\binom{3}{1} = 3$ τρόπους.

Τα τρία βιβλία θα δοθούν τώρα στα δύο παιδιά. Το ένα επομένως θα πάρει 2 και το άλλο 1 βιβλίο.

Το ένα παιδί θα πάρει 2 βιβλία με $\binom{3}{2}\binom{1}{1}$ τρόπους, διότι από τα τρία βιβλία παίρνουμε τα δύο να τα δώσουμε σε αυτό με $\binom{3}{2}$ τρόπους.

Το ίδιο παιδί μπορεί να πάρει 1 από τα τρία βιβλία με $\binom{3}{1}$ τρόπους και το άλλο παιδί τα 2 βιβλία από τα 2 που περίσσεψαν με $\binom{2}{2}$ τρόπους.

Από την προσθετική αρχή συμπεραίνουμε ότι τα 3 βιβλία μπορούν να δοθούν στα δύο μόνο παιδιά με

$$\binom{3}{2}\binom{1}{1} + \binom{3}{1}\binom{2}{2} = 3 + 3 = 6 \text{ τρόπους.}$$

Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή πια, για να δώσουμε τα 3 βιβλία στα παιδιά, ώστε το ένα να μην πάρει κανένα βιβλίο, έχουμε

$$\binom{3}{1}\left(\binom{3}{2}\binom{1}{1} + \binom{3}{1}\binom{2}{2}\right) = 3(3+3) = 18 \text{ τρόπους.}$$

(81) Εδώ έχουμε τώρα $3^4 = 81$ περιπτώσεις, αφού το κάθε βιβλίο από τα 4 μπορεί να δοθεί έως και σε τρία παιδιά.

(82) Αφού το κάθε παιδί θα πάρει βιβλίο, η κατανομή μπορεί να γίνει ως $4 = 1 + 1 + 2$. Χωρίζουμε λοιπόν τα 4 βιβλία σε 3 ομάδες, δύο με ένα στοιχείο και μία με 2 στοιχεία(βιβλία).

Βιβλία α, β, γ, δ : $4 = 1+1+2$					
1ος τρόπος	2ος τρόπος	3ος τρόπος	4ος τρόπος	5ος τρόπος	6ος τρόπος
α	α	α	β	β	γ
β	γ	δ	γ	δ	δ
γδ	βδ	βγ	αδ	αγ	αβ

Αυτό γίνεται με $\frac{4!}{1!1!2!2!} = 6$ διαφορετικούς τρόπους. Οι τρόποι αυτοί φαίνονται συστηματικά στον

παρακάτω πίνακα.

Οι ομάδες όμως αυτών των βιβλίων μπορούν τώρα να δοθούν στα 3 παιδιά με $3!=6$ τρόπους η καθεμία.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι έχουμε $6 \cdot 6 = 36$ τρόπους για να δώσουμε τα βιβλία, ώστε κάθε παιδί να πάρει ένα τουλάχιστον βιβλίο.

Γενικά,

• Μπορούμε να τοποθετήσουμε n διαφορετικά αντικείμενα σε m διαφορετικά κελιά χωρίς κενά κελιά, με

$$N = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n \text{ τρόπους.}$$

Στην περίπτωση μας είναι $n=4$ και $m=3$, οπότε:

$$N = (-1)^0 \binom{3}{0} (3-0)^4 + (-1)^1 \binom{3}{1} (3-1)^4 + (-1)^2 \binom{3}{2} (3-2)^4 = 81 - 48 + 3 = 36$$

(83) Αφού το ένα παιδί δεν θα πάρει καθόλου βιβλία, τα 4 βιβλία θα τα πάρουν τα δύο παιδιά, είτε ως $4=2+2$, δηλαδή 2 το καθένα, είτε ως $4=1+3$, δηλαδή 1 το ένα παιδί και 2 το άλλο.

♦ Στην περίπτωση $4=1+3$ η κατανομή γίνεται με $\frac{4!}{1!3!} \cdot 2! = 4 \cdot 2 = 8$ τρόπους.

Τονίζουμε ότι τα 4 βιβλία χωρίζονται σε δύο ομάδες του 1 και των 3 βιβλίων με $\frac{4!}{1!3!}$ διαφορετικούς τρόπους και αφού οι δύο ομάδες βιβλίων δίνονται σε 2 παιδιά, θα πάρουμε συνολικά $\frac{4!}{1!3!} \cdot 2!$ περιπτώσεις.

Στην περίπτωση τώρα που έχουμε την κατανομή $4=2+2$, ο χωρισμός των βιβλίων σε ομάδες γίνεται με $\frac{4!}{2!2!} = 3$ τρόπους. Αλλά οι δύο ομάδες βιβλίων θα δοθούν στα δύο παιδιά με $2!=2$ τρόπους.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή παίρνουμε $3 \cdot 2 = 6$ τρόπους.

Η κατανομή λοιπόν των βιβλίων ώστε ένα συγκεκριμένο παιδί να μην πάρει κανένα βιβλίο γίνεται από την προσθετική αρχή με $8+6=14$ τρόπους. Αφού όμως το ένα παιδί που δεν θα πάρει βιβλίο μπορεί να επιλεγεί με $\binom{3}{1} = 3$ τρόπους, συνολικά μια τέτοια κατανομή μπορεί να γίνει με $4 \cdot 14 = 56$ τρόπους.

Άλλος τρόπος.

Επιλέγουμε το παιδί που δεν θα πάρει βιβλίο με $\binom{3}{1} = 3$. Θα δώσουμε τα 4 βιβλία στα δύο άλλα παι-

διά, παρατηρώντας ότι έχουμε μόνο τους τρόπους $4=1+3=2+2=3+1$. Παίρνουμε το ένα από τα δύο παιδιά για να του δώσουμε βιβλία. Αυτό μπορεί να πάρει 1, 2 ή 3 βιβλία με:

$$\binom{4}{1}\binom{3}{3} + \binom{4}{2}\binom{2}{2} + \binom{4}{3}\binom{1}{1} = 4 + 6 + 4 = 14 \text{ τρόπους.}$$

Ας σημειώσουμε ότι δίνοντας στο ένα παιδί 1 βιβλίο με $\binom{3}{1}$ τρόπους, το άλλο θα πάρει αναγκαστικά 3 βιβλία με $\binom{3}{3}$ τρόπους, κάτι βέβαια που είναι προφανές.

Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε συνολικά $3 \cdot 14 = 42$ τρόπους.

Σχόλιο

Τα 4 βιβλία δίνονται σε 2 παιδιά με συνολικά $2^4 = 16$ τρόπους. Αφού θέλουμε όμως το καθένα από τα δύο παιδιά να πάρει ένα τουλάχιστον βιβλίο, πρέπει να εξαιρέσουμε τους δύο τρόπους, που αυτά δεν παίρνουν κανένα βιβλίο. Επομένως θα προκύψουν $16 - 2 = 14$ τρόποι.

Η μεθοδική λύση στο ερώτημα (γ)

■ Ας πάρουμε τώρα την περίπτωση με 4Τ και 3Π, όπου με Τ συμβολίζουμε τα τετράδια και με Π τα παιδιά.

$$4 = 3 + 1 + 0 = 2 + 2 + 0.$$

(i) Έστω ότι $4 = 3 + 1 + 0$. Τα τετράδια χωρίζονται σε ομάδες με 3 και 1 τετράδια με $\frac{4!}{3!1!} = 4$ τρόπους και κάθε ομάδα τετραδίων (πακέτα) δίνεται στα 3 παιδιά με $3!$ τρόπους, αφού οι ομάδες είναι διαφορετικές. Είναι ως να θέλουμε να βάλουμε σε μια σειρά τα στοιχεία Α,Β,Γ.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $4 \cdot 3! = 24$ τρόπους.

(ii) Έστω ότι $4 = 2 + 2 + 0$. Τα τετράδια χωρίζονται σε ομάδες με 2 και 2 τετράδια με $\frac{4!}{2!2!0!} = 3$ τρόπους και κάθε ομάδα τετραδίων (πακέτα) δίνεται στα 3 παιδιά με $3!$ τρόπους, αφού οι ομάδες είναι διαφορετικές. Είναι ως να θέλουμε να βάλουμε σε μια σειρά τα στοιχεία Α,Β,Γ.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $3 \cdot 3! = 18$ τρόπους. Από την προσθετική αρχή συμπεραίνουμε ότι θα έχουμε συνολικά :

$$24 + 18 = 42 \text{ τρόπους.}$$

Ενότητα 7

Συνδυαστική και Πιθανότητες

Εκφωνήσεις και λύσεις !!!

Άσκηση 7.1

Κάποιος διαθέτει 3 διαφορετικά σακάκια, 4 διαφορετικά παντελόνια, 5 διαφορετικά πουκάμισα, 10 διαφορετικά ζευγά-ρια κάλτσες και 2 διαφορετικά ζευγάρια παπούτσια:

- (α) Με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί φορώντας όλα τα είδη;
- (β) Ποια είναι η πιθανότητα να φοράει ένα ορισμένο σακάκι;
- (γ) Με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, αν φοράει το μπλε πουκάμισο και τα αθλητικά παπούτσια;

Λύση:

- (α) Για κάθε κατηγορία επιλέγουμε ένα αντικείμενο. Ο αριθμός τρόπων ντυσίματος είναι:

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 2 = 1200.$$

- (β) Θέλουμε να φοράει ένα συγκεκριμένο σακάκι. Τότε οι ευνοϊκοί τρόποι είναι:

$$1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 2 = 400, \text{ ενώ οι συνολικοί τρόποι είναι } 1200. \text{ Άρα } P = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3}.$$

- (γ) Τώρα είναι συγκεκριμένα το μπλε πουκάμισο και τα αθλητικά παπούτσια, ο-πότε για αυτά έχουμε 1 επιλογή. Για τα υπόλοιπα έχουμε:

$$3 \cdot 4 \cdot 10 = 120 \text{ τρόπους.}$$

Άσκηση 7.2

Οι πινακίδες κυκλοφορίας αποτελούνται από τρία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου που περιέχονται και στο λατινικό (A, B, E, Z, H, I, K, M, N, O, P, T, X, Y) ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο αριθμό.

- (α) Πόσες διαφορετικές πινακίδες μπορούν να κατασκευαστούν;
- (β) Πόσες τέτοιες πινακίδες υπάρχουν που αρχίζουν με φωνήεν του ελληνικού αλφαβήτου και τελειώνουν σε άρτιο αριθμό;
- (γ) Να βρείτε την πιθανότητα μια πινακίδα να αρχίζει από A και να τελειώνει σε περιττό αριθμό.
- (δ) Ποια είναι η πιθανότητα ένα αυτοκίνητο να έχει βγάλει άδεια στην Καρδίτσα, δηλαδή οι πινακίδες να αρχίζουν με KA;
- (ε) Ποια είναι η πιθανότητα μια πινακίδα να αποτελείται από διαφορετικά γράμματα και διαφορετικά ψηφία;

Λύση:

(α) Έχουμε 14 επιτρεπτά γράμματα και τετραψήφιο αριθμό που δεν αρχίζει από 0. Έτσι ο συνολικός αριθμός πινακίδων είναι : $N = 14^3 \cdot 9 \cdot 10^3 = 24\,696\,000$.

(β) Αριθμός πινακίδων που αρχίζουν με φωνήεν και τελειώνουν σε άρτιο αριθμό:

$$N_\beta = 6 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 9 \cdot 10^2 \cdot 5 = 6 \cdot 14^2 \cdot 9 \cdot 10^2 \cdot 5 = 5\,292\,000.$$

Τονίζουμε ότι έχουμε 6 φωνήεντα και τα άρτια ψηφία έχουν πλήθος 5.

(γ) Αριθμός ευνοϊκών περιπτώσεων (Η πινακίδα αρχίζει από Α και τελειώνει σε περιττό αριθμό):

$N_\gamma = 1 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 9 \cdot 10^2 \cdot 5 = 14^2 \cdot 9 \cdot 10^2 \cdot 5$. Δεν εκτελούμε τις πράξεις για να γίνουν απλοποιήσεις. Η πιθανότητα είναι :

$$P_\gamma = \frac{N_\gamma}{N} = \frac{14^2 \cdot 9 \cdot 10^2 \cdot 5}{14^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = \frac{5}{14 \cdot 10} = \frac{1}{28}.$$

(δ) Αριθμός ευνοϊκών πινακίδων που αρχίζουν με ΚΑ: $N_\delta = 1 \cdot 1 \cdot 14 \cdot 9 \cdot 10^3 = 14 \cdot 9 \cdot 10^3$. Έτσι:

$$P_\delta = \frac{N_\delta}{N} = \frac{14 \cdot 9 \cdot 10^3}{14^3 \cdot 9 \cdot 10^3} = \frac{1}{14^2} = \frac{1}{196}.$$

(ε) Ευνοϊκές πινακίδες με όλα τα γράμματα και όλα τα ψηφία διαφορετικά. Αυτές έχουν πλήθος:

$N_\epsilon = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. Δεν εκτελούμε τις πράξεις για να γίνουν απλοποιήσεις. Επομένως:

$$P_\epsilon = \frac{N_\epsilon}{N} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{14^3 \cdot 9 \cdot 10^3}.$$

Με απλοποίηση μόνο στα γινόμενα (χωρίς να τα υπολογίσουμε πλήρως) φτάνουμε: $P_\epsilon = \frac{351}{875}$.

Γενική παρατήρηση:

Στην εύρεση πιθανοτήτων είναι προτιμότερο να αφήνουμε το πλήθος των ευνοϊκών και των δυνατών περιπτώσεις σε μορφή γινομένου για να γίνονται πιο εύκολα οι απλοποιήσεις, παρά να εκτελούμε τις πράξεις.

Άσκηση 7.3

Σε έναν πάγκο με 6 θέσεις πρόκειται να καθίσουν 4 άτομα.

(α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

(β) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, αν ο Δημήτρης και η Μαριάννα πρέπει να κάθονται δίπλα-δίπλα;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα η τελευταία θέση να είναι άδεια;

(δ) Αν τα 4 άτομα είναι δύο αγόρια και δύο κορίτσια, ποια είναι η πιθανότητα να μην κάθονται δίπλα-δίπλα δύο αγόρια ή δύο κορίτσια;

Λύση:

(α) Ο αριθμός των τρόπων να καθίσουν 4 άτομα σε 6 διακριτές θέσεις είναι:

$$P(6, 4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

(β) Θεωρούμε το ζευγάρι (Δ, M) ως μπλοκ. Υπάρχουν 5 δυνατές θέσεις για το μπλοκ

$$(\text{ζεύγη } 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6).$$

Σε κάθε μπλοκ, η σειρά μπορεί να είναι ΔM ή $M \Delta$ (2 τρόποι).

Τα άλλα δύο άτομα κάθονται στις υπόλοιπες 4 θέσεις με $P(4, 2) = 4 \cdot 3 = 12$ τρόπους. Άρα

$$N = 5 \cdot 2 \cdot 12 = 120.$$

(γ) Θέλουμε η 6η θέση να είναι κενή. Τότε τα 4 άτομα κάθονται σε 4 από τις 5 πρώτες:

$$N = \binom{5}{4} \cdot 4! = 5 \cdot 24 = 120.$$

$$\text{Άρα } P = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}.$$

(δ) Έστω αγόρια A_1, A_2 και κορίτσια K_1, K_2 . Ας είναι A το ενδεχόμενο "τα δύο αγόρια δίπλα-δίπλα" και B το ενδεχόμενο "τα δύο κορίτσια δίπλα-δίπλα".

Όπως στο (β) ερώτημα βρίσκουμε $|A| = |B| = 120$.

Για να ισχύουν και τα δύο, και τα αγόρια και τα κορίτσια σχηματίζουν μπλοκ 2 θέσεων. Υπάρχουν 6 τρόποι να διαλέξουμε δύο ζεύγη θέσεων που δεν επικαλύπτονται, 2 τρόποι να αποφασίσουμε ποιο ζευγάρι παίρνουν τα αγόρια και ποιο τα κορίτσια και από 2! τρόπους για την εσωτερική διάταξη κάθε μπλοκ. Έτσι $|A \cap B| = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

Με την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού παίρνουμε: $|A \cup B| = 120 + 120 - 48 = 192$.

Επομένως οι "καλές" διατάξεις (χωρίς δίπλα-δίπλα άτομα ίδιου φύλου) είναι $360 - 192 = 168$ και η πιθανότητα

$$P = \frac{168}{360} = \frac{7}{15}.$$

Άσκηση 7.4

Τέσσερα αγόρια και τρία κορίτσια (όλα διακεκριμένα) πρόκειται να καθίσουν σε μια σειρά.

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν τα παιδιά να μουν σε μια σειρά;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα να κάθεται στην πρώτη θέση κορίτσι;

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα να κάθεται στην πρώτη και τελευταία θέση κορίτσι;

Λύση:

(α) Υπάρχουν 7 διαφορετικά παιδιά, οπότε ο αριθμός διατάξεων είναι $7! = 5040$.

(β) Θεωρούμε τα 4 αγόρια ως ένα μπλοκ A και τα 3 κορίτσια ως μπλοκ K .

Τα δύο μπλοκ διατάσσονται με $2!$ τρόπους.

Μέσα στο μπλοκ Α έχουμε $4!$ διατάξεις και μέσα στο Κ έχουμε $3!$.

$$\text{Άρα } N = 2! \cdot 4! \cdot 3! = 288 \text{ και}$$

$$P = \frac{288}{5040} = \frac{2}{35}.$$

(γ) Για να κάθεται στην πρώτη θέση κορίτσι, επιλέγουμε ένα από τα 3 κορίτσια εκεί (3 τρόποι) και τα υπόλοιπα 6 παιδιά διατάσσονται στις υπόλοιπες θέσεις με $6!$ τρόπους.

$$\text{Άρα } P = \frac{3 \cdot 6!}{7!} = \frac{3}{7}.$$

(δ) Θέλουμε κορίτσι στην πρώτη και στην τελευταία θέση.

Πιθανότητα στην πρώτη θέση κορίτσι: $3/7$. Αν αυτό συμβεί, μένουν 2 κορίτσια και 5 αγόρια, άρα συνολικά 6 παιδιά για τις υπόλοιπες θέσεις. Η πιθανότητα η τελευταία θέση να είναι κορίτσι είναι τώρα $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Έτσι $P = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$.

Άσκηση 7.5

Ένα δοχείο περιέχει 7 διακεκριμένες άσπρες και 3 διακεκριμένες μαύρες μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία δύο μπάλες.

A: Και οι δύο μπάλες να είναι άσπρες.

B: Τουλάχιστον μία μπάλα να είναι μαύρη.

Γ: Το πολύ μία μπάλα να είναι μαύρη.

Λύση:

Συνολικά $7 + 3 = 10$ μπάλες. Οι δυνάδες χωρίς σειρά είναι $\binom{10}{2} = 45$.

A: Επιλέγουμε 2 από τις 7 άσπρες:

$$\binom{7}{2} = 21, \text{ οπότε } P(A) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}.$$

B: Τουλάχιστον μία μαύρη: Παίρνουμε το συμπλήρωμα του A, οπότε $P(B) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$.

Γ: Το πολύ μία μαύρη σημαίνει 0 ή 1 μαύρη.

Για 0 μαύρες έχουμε 21 επιλογές.

Μία άσπρη και 1 μαύρη: Εδώ έχουμε

$$\binom{3}{1} \binom{7}{1} = 3 \cdot 7 = 21 \text{ δυνατότητες.}$$

Συνολικά υπάρχουν $21 + 21 = 42$ ευνοϊκές περιπτώσεις, οπότε $P(\Gamma) = \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$.

Άσκηση 7.6

Με τα ψηφία 1, 2, 3, 4 και 5 φτιάχνουμε τετραψήφιους αριθμούς, στους οποίους το κάθε ψηφίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί περισσότερο από μία φορά.

(α) Πόσους αριθμούς μπορούμε να φτιάξουμε;

(β) Αν πάρουμε τυχαία έναν τέτοιο αριθμό, ποια είναι η πιθανότητα να έχει όλα τα ψηφία του διαφορετικά;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός αυτός να είναι περιττός;

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 9;

Λύση:

(α) Κάθε θέση έχει 5 επιλογές, άρα ο αριθμός τετραψήφων αριθμών είναι $5^4 = 625$.

(β) Θέλουμε όλα τα ψηφία να είναι διαφορετικά. Έχουμε 5 επιλογές για την πρώτη θέση, 4 για τη δεύτερη, 3 για την τρίτη και 2 για την τέταρτη, οπότε οι ευνοϊκοί αριθμοί είναι $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. Επομένως $P = \frac{120}{625} = \frac{24}{125}$.

(γ) Για να είναι ο αριθμός περιττός, το τελευταίο ψηφίο πρέπει να είναι ένα από τα 1,3,5, δηλαδή έχουμε 3 δυνατότητες. Για τις άλλες θέσεις έχουμε 5 επιλογές στην καθεμιά. Άρα οι περιττοί αριθμοί είναι $5^3 \cdot 3 = 375$.

Η πιθανότητα είναι $P = \frac{375}{625} = \frac{3}{5}$.

(δ) Απαιτούμε το άθροισμα των ψηφίων να είναι πολλαπλάσιο του 9. Με προσεκτική απαρίθμηση προκύπτει ότι υπάρχουν 52 τετραψήφιοι με άθροισμα 9 και 10 τετραψήφιοι με άθροισμα 18, άρα συνολικά 62 πολλαπλάσια του 9. Έτσι $P = \frac{62}{625}$.

Άσκηση 7.7

Από το σύνολο των μεταθέσεων των στοιχείων $1, 2, 3, \dots, n$ επιλέγουμε τυχαία μία.

(α) Να βρείτε ποια είναι η πιθανότητα η μετάθεση να μην αρχίζει από 1.

(β) Έστω ότι η πιθανότητα μια μετάθεση να μην αρχίζει από 1 είναι $\frac{4}{5}$. Ποια πιθανότητα έχει η μετάθεση αυτή να σχηματίζει έναν άρτιο αριθμό με διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία;

Λύση:

(α) Όλες οι μεταθέσεις είναι ισοπίθανες. Η πιθανότητα το πρώτο στοιχείο να είναι 1 είναι $\frac{1}{n}$, οπότε η πιθανότητα να μην αρχίζει από 1 είναι $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$.

(β) Θέτουμε $\frac{n-1}{n} = \frac{4}{5}$ και βρίσκουμε $n = 5$. Εξετάζουμε λοιπόν τις μεταθέσεις των ψηφίων

1, 2, 3, 4, 5.

Οι συνολικές μεταθέσεις είναι $5! = 120$, αλλά αυτό δεν θα μας χρειαστεί στην περίπτωση μας.

Οι μεταθέσεις που δεν αρχίζουν από 1 είναι σε πλήθος: $4 \cdot 4! = 96$, οπότε $N(\Omega) = 96$.

Οι άρτιες μεταθέσεις (τελευταίο ψηφίο 2 ή 4) έχουν πλήθος: $2 \cdot 4! = 48$.

Από αυτές τις μεταθέσεις αφαιρούμε όσες αρχίζουν από 1. Το πλήθος αυτών των μεταθέσεων είναι όμως $2 \cdot 3! = 12$.

Έτσι $|B \cap E| = 48 - 12 = 36$, όπου B το γεγονός "δεν αρχίζει από 1" και E το γεγονός "άρτιος αριθμός". Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P = \frac{36}{96} = \frac{3}{8}.$$

Άσκηση 7.8

Δέκα παιδιά, ανάμεσα στα οποία είναι ο Κώστας και η Ελένη, θα καθίσουν τυχαία σε μία σειρά δέκα θέσεων.

(α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

(β) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν, αν ο Κώστας κάθεται στην 1η θέση, η Ελένη στην τελευταία θέση και με ποια πιθανότητα μπορεί να γίνει αυτό;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας και η Ελένη να κάθονται δίπλα-δίπλα;

(δ) Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας, η Ελένη και η Μαργαρίτα να κάθονται σε 3 συνεχόμενα καθίσματα και η Μαργαρίτα να κάθεται ανάμεσα στον Κώστα και στην Ελένη;

Λύση:

(α) Τα 10 διαφορετικά παιδιά μπορούν να διαταχθούν σε σειρά με $10!$ τρόπους.

(β) Οι θέσεις 1 και 10 είναι κατειλημμένες, οπότε μένουν 8 παιδιά. Αυτά τα 8 παιδιά διατάσσονται στις ενδιάμεσες θέσεις με $8!$ τρόπους. Άρα $P = \frac{8!}{10!} = \frac{1}{90}$.

(γ) Θεωρούμε τους Κώστα-Ελένη ως ένα μπλοκ. Μαζί με τα άλλα 8 παιδιά έχουμε 9 αντικείμενα, τα οποία διατάσσονται με $9!$ τρόπους. Μέσα στο μπλοκ υπάρχουν 2 διατάξεις (ΚΕ ή ΕΚ).

$$\text{Άρα } N = 2 \cdot 9! \text{ και } P = \frac{2 \cdot 9!}{10!} = \frac{1}{5}.$$

(δ) Επιλέγουμε τις τρεις συνεχόμενες θέσεις: υπάρχουν $10 - 3 + 1 = 8$ τριάδες. Στη μεσαία θέση κάθε τριάδας βάζουμε τη Μαργαρίτα, ενώ στις δύο άκρες κάθονται ο Κώστας και η Ελένη με 2 τρόπους.

Τα υπόλοιπα 7 παιδιά διατάσσονται στις άλλες θέσεις με $7!$ τρόπους. Άρα

$$N = 8 \cdot 2 \cdot 7! = 16 \cdot 7! \text{ και}$$

$$P = \frac{16 \cdot 7!}{10!} = \frac{1}{45}.$$

Άσκηση 7.9

Σημειώνουμε σε μια σειρά την εποχή του έτους που έχουν γεννηθεί 4 άτομα.

(α) Πόσες τετράδες μπορούμε να πάρουμε;

(β) Πόσες τετράδες υπάρχουν, αν όλα τα άτομα έχουν γεννηθεί σε διαφορετική εποχή;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα οι μισοί να έχουν γεννηθεί σε μια εποχή και οι άλλοι μισοί σε μια άλλη εποχή;

Λύση:

(α) Κάθε άτομο μπορεί να έχει γεννηθεί σε μία από τις 4 εποχές. Έτσι υπάρχουν $4^4 = 256$ πιθανές τετράδες.

(β) Θέλουμε κάθε εποχή να εμφανίζεται μία φορά. Απλώς διατάσσουμε τις 4 εποχές:

$$4! = 24 \text{ τετράδες.}$$

(γ) Θέλουμε δύο εποχές να εμφανίζονται από δύο φορές η καθεμιά.

Επιλέγουμε τις δύο εποχές: $\binom{4}{2} = 6$ τρόποι. Για τις θέσεις, επιλέγουμε σε ποιες δύο από τις 4 θέσεις θα εμφανιστεί η πρώτη εποχή: $\binom{4}{2} = 6$ τρόποι. Άρα $N = 6 \cdot 6 = 36$ και $P = \frac{36}{256} = \frac{9}{64}$.

Άσκηση 7.10

Από ένα σύνολο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαία 4 άτομα.

(α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

(β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) τα άτομα να είναι γυναίκες,

ii) ένα τουλάχιστον άτομο να είναι άνδρας,

iii) να υπάρχει μία μόνο γυναίκα,

iv) να υπάρχουν 2 ακριβώς άνδρες.

(γ) Ένας άνδρας και μία γυναίκα θα είναι ο πρόεδρος και ο αντιπρόεδρος της επιτροπής των 4 ατόμων και οι άλλοι δύο θα είναι μέλη. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Λύση:

(α) Ο συνολικός αριθμός επιτροπών είναι $\binom{13}{4} = 715$.

(β) Υπολογίζουμε διαδοχικά τα ενδεχόμενα.

i) Όλα τα μέλη να είναι γυναίκες: $\binom{6}{4} = 15$ επιτροπές, οπότε θα είναι $P = \frac{15}{715} = \frac{3}{143}$.

ii) Ένα τουλάχιστον άτομο να είναι άνδρας: συμπληρωματικό του (i), άρα

$$P = 1 - \frac{3}{143} = \frac{140}{143}.$$

iii) Μία μόνο γυναίκα: επιλέγουμε 1 γυναίκα και 3 άνδρες:

$$\binom{6}{1} \binom{7}{3} = 6 \cdot 35 = 210 \text{ επιτροπές.}$$

Η πιθανότητα είναι $P = \frac{210}{715} = \frac{42}{143}.$

iv) Δύο ακριβώς άνδρες: επιλέγουμε 2 άνδρες και 2 γυναίκες:

$$\binom{7}{2} \binom{6}{2} = 21 \cdot 15 = 315 \text{ επιτροπές.}$$

Άρα $P = \frac{315}{715} = \frac{63}{143}.$

(γ) Ένας άνδρας και μία γυναίκα θα είναι πρόεδρος και αντιπρόεδρος.

Επιλέγουμε ποιος άνδρας και ποια γυναίκα θα πάρουν τις δύο θέσεις:

$$\binom{7}{1} \binom{6}{1} = 7 \cdot 6 = 42 \text{ τρόποι.}$$

Κατόπιν αναθέτουμε τους ρόλους Προέδρου–Αντιπροέδρου: 2 τρόποι.

Τα υπόλοιπα δύο μέλη επιλέγονται από τους 11 εναπομείναντες καθηγητές με

$$\binom{11}{2} = 55 \text{ τρόπους.}$$

Συνολικά $N = 42 \cdot 2 \cdot 55 = 4620$ τρόποι.

Άσκηση 7.11

Εκτελούμε δύο πειράματα τύχης:

i) Ρίχνουμε ένα ζάρι 4 φορές.

ii) Ρίχνουμε 24 φορές 2 ζάρια.

(α) Πόσα στοιχεία έχει ο δειγματικός χώρος Ω_1 στο πρώτο πείραμα και πόσα ο Ω_2 στο δεύτερο πείραμα;

(β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε τουλάχιστον ένα «έξι» σε 4 ρίψεις ενός ζαριού.

(γ) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά «εξάρες» σε 24 ρίψεις δύο ζαριών.

(δ) Σε ποιο από τα δύο ενδεχόμενα των ερωτημάτων (β) και (γ) συμφέρει να στοιχηματίσει κάποιος;

Πρόβλημα του Cavalier de Mere

Λύση:

(α) Σε 4 ρίψεις ενός ζαριού το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$. Σε 24 ρίψεις

δύο ζαριών το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι $36 \cdot 36 \cdots 36 = 36^{24}$ (24 παράγοντες).

(β) Το ενδεχόμενο να μη φέρουμε 6 στις 4 ρίψεις ενός ζαριού έχει $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ ευνοϊκές περιπτώσεις. Επομένως η πιθανότητα να φέρουμε ένα τουλάχιστον 6 στις 4 ρίψεις ενός ζαριού είναι ίση με:

$$1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,518.$$

(γ) Το ενδεχόμενο να μη φέρουμε εξάρες στις 24 ρίψεις δύο ζαριών έχει $35 \cdot 35 \cdots 35 = 35^{24}$ ευνοϊκές περιπτώσεις. Επομένως η πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά εξάρες στις 24 ρίψεις δύο ζαριών είναι ίση με:

$$1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 1 - 0,5086 \approx 0,491$$

(δ) Παρατηρούμε ότι $0,518 > 0,491$, δηλαδή η πιθανότητα να φέρουμε ένα τουλάχιστον 6 στις 4 ρίψεις ενός ζαριού είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να φέρουμε μία τουλάχιστον φορά εξάρες στις 24 ρίψεις δύο ζαριών. (Πρόβλημα του de Mere).

Η απάντηση της ΑΙ

(α) Υπολογισμός του πλήθους των στοιχείων των δειγματικών χώρων.

Στο πρώτο πείραμα ρίχνουμε ένα ζάρι 4 φορές.

Κάθε ρίψη έχει 6 δυνατά αποτελέσματα και οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες. Άρα το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου είναι

$$|\Omega_1| = 6^4 = 1296.$$

Στο δεύτερο πείραμα ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο ζάρια, και αυτό επαναλαμβάνεται 24 φορές. Μία ρίψη δύο ζαριών έχει $6 \cdot 6 = 36$ δυνατά, ισοπίθανα αποτελέσματα (διατεταγμένα ζεύγη). Οι 24 ρίψεις είναι ανεξάρτητες, οπότε το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου είναι

$$|\Omega_2| = 36^{24}.$$

(β) Πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον ένα «έξι» σε 4 ρίψεις ενός ζαριού.

Θέλουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A : «τουλάχιστον ένα “έξι” σε 4 ρίψεις ενός ζαριού». Υπολογίζουμε πρώτα τη πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου $\bar{A}$, όπου $\bar{A}$: «σε καμία από τις 4 ρίψεις δεν φέρνουμε “έξι”».

Η πιθανότητα να μην φέρουμε “έξι” σε μία ρίψη είναι $\frac{5}{6}$. Για 4 ανεξάρτητες ρίψεις έχουμε

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}.$$

Επομένως θα είναι :

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \\ &= 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,518 \end{aligned}$$

(γ) Πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά «εξάρες» σε 24 ρίψεις δύο ζαριών.

Ορίζουμε το ενδεχόμενο B : «σε 24 ρίψεις δύο ζαριών να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά “εξάρες”, δηλαδή το ζεύγος $(6,6)$ ».

Σε μία ρίψη δύο ζαριών, υπάρχουν συνολικά 36 ισοπίθανα αποτελέσματα, αλλά μόνο ένα από αυτά, το $(6,6)$, αντιστοιχεί σε “εξάρες”. Άρα η πιθανότητα για “εξάρες” σε μία ρίψη είναι $\frac{1}{36}$, οπότε

$$P = \frac{1}{36}, \quad P = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}.$$

Για 24 ανεξάρτητες ρίψεις δύο ζαριών, η πιθανότητα να μην φέρουμε ποτέ “εξάρες” είναι

$$P(\bar{B}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Άρα

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914.$$

(δ) Σύγκριση των δύο ενδεχομένων και επιλογή στοιχήματος.

Συγκρίνουμε τις πιθανότητες που βρήκαμε:

$$P(A) = \frac{671}{1296} \approx 0,518, \quad P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914.$$

Εφόσον $P(A) > P(B)$, είναι λίγο πιο πιθανό να φέρουμε τουλάχιστον ένα “έξι” σε 4 ρίψεις ενός ζαριού, παρά να φέρουμε τουλάχιστον μία φορά “εξάρες” σε 24 ρίψεις δύο ζαριών. Άρα, αν κάποιος θέλει να στοιχηματίσει, τον συμφέρει να επιλέξει το ενδεχόμενο του ερωτήματος (β) .

Άσκηση 7.12

Έστω δύο σύνολα A, B με $|A| = 4$ και $|B| = 3$, όπου γενικά με $|X|$ ή με $N(X)$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου X . Επιλέγουμε τυχαία μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$, θεωρώντας ότι όλες οι συναρτήσεις από το A στο B είναι ισοπίθανες.

Να βρείτε την πιθανότητα η συνάρτηση f να είναι επί, δηλαδή κάθε στοιχείο του B να εμφανίζεται ως τιμή της f ή ακόμα όπως λέμε να έχει σύνολο τιμών το B .

Λύση:

Η άσκηση είναι αφορμή για να δει κάποιος τον τρόπο εφαρμογής της αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού για δύο ή τρία σύνολα, περιπτώσεις που είναι άμεσα σχεδόν κατανοητές από ένα διάγραμμα Venn.

Ο συνολικός αριθμός συναρτήσεων από το A στο B είναι 3^4 , αφού κάθε ένα από τα 4 στοιχεία του A έχει 3 δυνατές εικόνες στο B . Έτσι ο δειγματικός χώρος έχει

$$|\Omega| = 3^4 = 81 \text{ ισοπίθανες περιπτώσεις.}$$

Θέλουμε να μετρήσουμε πόσες από αυτές τις συναρτήσεις είναι επί. Αυτό ισοδυναμεί με το να μοιράσουμε τα 4 στοιχεία του A στα 3 στοιχεία του B έτσι ώστε κανένα στοιχείο του B να μην μείνει χωρίς πρότυπο.

Χρησιμοποιούμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. Έστω ότι τα στοιχεία του B είναι b_1, b_2, b_3 .

- Συναρτήσεις που δεν παίρνουν ποτέ την τιμή b_1 : Τότε οι τιμές της f είναι μόνο στα δύο άλλα στοιχεία, οπότε έχουμε 2^4 συναρτήσεις. Αντίστοιχα για κάθε στοιχείο του B . Άρα συνολικά έχουμε $\binom{3}{1} 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$ συναρτήσεις που «χάνουν» τουλάχιστον ένα συγκεκριμένο στοιχείο.

- Συναρτήσεις που δεν παίρνουν ποτέ τις τιμές δύο συγκεκριμένων στοιχείων, π.χ. b_1, b_2 : τότε όλες οι τιμές της f είναι το b_3 , Υπάρχει μόνο $1^4 = 1$ συνάρτηση.

Υπάρχουν $\binom{3}{2}$ επιλογές για το ποια δύο στοιχεία θα λείπουν, δηλαδή συνολικά $\binom{3}{2} 1^4 = 3 \cdot 1 = 3$ συναρτήσεις αυτού του τύπου.

Με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού ο αριθμός των συναρτήσεων επί είναι:

$$N_{\text{επί}} = 3^4 - \binom{3}{1} 2^4 + \binom{3}{2} 1^4 = 81 - 48 + 3 = 36.$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(\eta f \text{ είναι επί}) = \frac{N_{\text{επί}}}{|\Omega|} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}.$$

Άσκηση 7.13

Έστω δύο σύνολα A, B με $|A| = 4$ και $|B| = 4$. Επιλέγουμε τυχαία μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$, θεωρώντας ότι όλες οι συναρτήσεις από το A στο B είναι ισοπίθανες.

Να βρείτε την πιθανότητα η f να είναι επί, να έχει δηλαδή σύνολο τιμών το B .

Λύση:

Ο συνολικός αριθμός συναρτήσεων από το A στο B είναι $|\Omega| = 4^4 = 256$.

Όταν $|A| = |B|$ και τα σύνολα είναι πεπερασμένα, μια συνάρτηση είναι επί, αν και μόνο αν είναι 1-1.

1. Αυτό σημαίνει ότι οι επί συναρτήσεις είναι ακριβώς οι μεταθέσεις των 4 στοιχείων του B .

Ο αριθμός των μεταθέσεων 4 στοιχείων είναι:

$$N_{\text{επί}} = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(\eta f \text{ είναι επί}) = \frac{N_{\text{επί}}}{|\Omega|} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}.$$

Άσκηση 7.14

Έστω δύο σύνολα A, B με $|A| = 5$ και $|B| = 4$. Επιλέγουμε τυχαία μια συνάρτηση

$f: A \rightarrow B$, θεωρώντας ότι όλες οι συναρτήσεις από το A στο B είναι ισοπίθανες.

Να βρείτε την πιθανότητα η f να είναι επί, να έχει δηλαδή σύνολο τιμών το B .

Λύση:

Κάθε ένα από τα 5 στοιχεία του A έχει 4 δυνατές εικόνες στο B , οπότε ο συνολικός αριθμός συναρτήσεων είναι

$$|\Omega| = 4^5 = 1024.$$

Θέλουμε να μετρήσουμε τις συναρτήσεις επί. Ισοδύναμα, θέλουμε κάθε στοιχείο του B να εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά ως τιμή της f . Χρησιμοποιούμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού.

Έστω ότι $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα ότι κάποια στοιχεία του B δεν εμφανίζονται ως τιμές.

- Αν λείπει ένα συγκεκριμένο στοιχείο, π.χ. το b_1 , τότε η f παίρνει τιμές μόνο στα άλλα 3 στοιχεία.

Άρα έχουμε 3^5 συναρτήσεις. Υπάρχουν $\binom{4}{1}$ επιλογές για το ποιο στοιχείο λείπει, δηλαδή

$$\binom{4}{1} 3^5 = 4 \cdot 243 = 972$$

συναρτήσεις αυτού του τύπου.

- Αν λείπουν δύο συγκεκριμένα στοιχεία, π.χ. b_1, b_2 , τότε η f παίρνει τιμές μόνο στα

b_3, b_4 , οπότε έχουμε 2^5 συναρτήσεις. Υπάρχουν $\binom{4}{2}$ ζεύγη που μπορούν να λείπουν, οπότε

$$\binom{4}{2} 2^5 = 6 \cdot 32 = 192.$$

- Αν λείπουν τρία συγκεκριμένα στοιχεία του B , τότε όλες οι τιμές της f είναι το ένα στοιχείο που απομένει, οπότε υπάρχει μόνο $1^5 = 1$ συνάρτηση. Υπάρχουν $\binom{4}{3}$ τρόποι να διαλέξουμε ποια τρία στοιχεία λείπουν, δηλαδή $\binom{4}{3} 1^5 = 4 \cdot 1 = 4$.

Με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού ο αριθμός των συναρτήσεων επί είναι

$$N_{\text{επί}} = 4^5 - \binom{4}{1} 3^5 + \binom{4}{2} 2^5 - \binom{4}{3} 1^5 =$$

$$1024 - 4 \cdot 243 + 6 \cdot 32 - 4 \cdot 1 =$$

$$1024 - 972 + 192 - 4 = 240.$$

Επομένως η πιθανότητα να είναι η f επί είναι

$$P(\text{η } f \text{ είναι επί}) = \frac{N_{\text{onto}}}{|\Omega|} = \frac{240}{1024} = \frac{15}{64}.$$

Άσκηση 7.15

Επιλέγονται τυχαία δύο τετράγωνα σε μια σκακιέρα 8×8 . Ποια είναι η πιθανότητα τα δύο αυτά τετράγωνα να έχουν μια κοινή πλευρά;

Λύση:

Ο αριθμός τρόπων για να επιλεγεί το πρώτο τετράγωνο είναι 64 και για το δεύτερο είναι 63. Άρα ο συνολικός αριθμός διατεταγμένων επιλογών δύο τετραγώνων είναι

$$64 \cdot 63 = 4032.$$

Τώρα υπολογίζουμε τις ευνοϊκές περιπτώσεις:

- Αν το πρώτο τετράγωνο είναι ένα από τα 4 γωνιακά τετράγωνα, τότε το δεύτερο τετράγωνο μπορεί να επιλεγεί σε 2 τρόπους.

- Αν το πρώτο τετράγωνο είναι ένα από τα 24 μη γωνιακά τετράγωνα των πλευρών της σκακιέρας, τότε το δεύτερο τετράγωνο μπορεί να επιλεγεί σε 3 τρόπους.

- Αν το πρώτο τετράγωνο είναι ένα από τα 36 εσωτερικά τετράγωνα, τότε το δεύτερο τετράγωνο μπορεί να επιλεγεί σε 4 τρόπους.

Επομένως, ο αριθμός των ευνοϊκών διατεταγμένων ζευγών είναι:

$$4 \cdot 2 + 24 \cdot 3 + 36 \cdot 4 = 224.$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P = \frac{224}{4032} = \frac{1}{18}.$$

Η απάντηση της ΑΙ

Θα μετρήσουμε τα ζεύγη τετραγώνων ως αδιάτακτα. Η σκακιέρα έχει $8 \times 8 = 64$ τετράγωνα.

Ο συνολικός αριθμός αδιάτακτων ζευγών τετραγώνων είναι:

$$\binom{64}{2} = \frac{64 \cdot 63}{2} = 2016.$$

Τώρα βρίσκουμε πόσα από αυτά τα ζεύγη έχουν κοινή πλευρά.

• Οριζόντια γειτονικά τετράγωνα: Σε κάθε γραμμή 8 τετραγώνων υπάρχουν 7 ζεύγη γειτονικών τετραγώνων. Υπάρχουν 8 γραμμές, οπότε έχουμε $8 \cdot 7 = 56$ οριζόντια γειτονικά ζεύγη.

• Κατακόρυφα γειτονικά τετράγωνα: Σε κάθε στήλη 8 τετραγώνων υπάρχουν επίσης 7 ζεύγη γειτονικών τετραγώνων. Υπάρχουν 8 στήλες, οπότε έχουμε $8 \cdot 7 = 56$ κατακόρυφα γειτονικά ζεύγη.

Συνολικά τα ζεύγη τετραγώνων που έχουν κοινή πλευρά είναι

$$56 + 56 = 112.$$

Άρα η πιθανότητα είναι $P = \frac{112}{2016} = \frac{1}{18}$.

Άσκηση 7.16

Το καθένα από δύο μικρά BAN έχει 3 θέσεις μπροστά και 4 πίσω, όλες αριθμημένες. Στα δύο BAN θα καθίσουν 3 κορίτσια(K) και 4 αγόρια(A).

- (α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό ;
 (β) Σε πόσες περιπτώσεις 3 κορίτσια κάθονται σε τρεις συνεχόμενες θέσεις στα πίσω καθίσματα ;
 (γ) Ποια είναι η πιθανότητα σε 3 διαδοχικές θέσεις των πίσω καθισμάτων να κάθονται κορίτσια, αν το κάθε παιδί επιλέγει θέση χωρίς προτίμηση ;

Λύση:

(α) Έχουμε συνολικά $7 + 7 = 14$ θέσεις και $3 + 4 = 7$ παιδιά.

Τα παιδιά επιλέγουν 7 θέσεις από τις 14 με $\binom{14}{7}$ τρόπους και σε αυτές κάθονται με $7!$ Τρόπους. Επομένως για να καθίσουν έχουν $\binom{14}{7} 7! = (14)_7 = 17297280$ δυνατότητες.

(β) Σε καθένα από τα 2 BAN και στις πίσω θέσεις 3 κορίτσια έχουν 2 δυνατότητες να κάθονται μαζί: 1-2-3 ή 2-3-4.

Επομένως στα 2 BAN έχουμε 4 δυνατότητες.

Κάθε φορά όμως που επιλέγονται αυτές οι διαδοχικές θέσεις τα κορίτσια κάθονται με $3!$ τρόπους. Από τις υπόλοιπες $14 - 3 = 11$ θέσεις θα πάρουμε 4 για να καθίσουν τα αγόρια και επειδή σε 4 θέσεις τα αγόρια κάθονται με $4!$ τρόπους, έχουμε $\binom{11}{4} \cdot 4!$ τρόποι.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν λοιπόν :

$$4 \cdot 3! \binom{11}{4} 4! \text{ τρόποι}$$

για να καθίσουν τα κορίτσια, ώστε να είναι παρέα.

(γ) Σύμφωνα με τα δυο πρώτα ερωτήματα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$P = \frac{4 \cdot 3! \binom{11}{4} 4!}{\binom{14}{7} 7!} = \frac{4 \cdot 3! \frac{11!}{4!7!} \cdot 4!}{\frac{14!}{7!7!}} = \frac{24 \cdot 11!}{14!} = \frac{24}{12 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{2}{182} = \frac{1}{91}$$

Η απάντηση της ΑΙ

(α) Κάθε BAN έχει 3 μπροστινά και 4 πίσω καθίσματα. Άρα συνολικά υπάρχουν $3 + 4 = 7$ θέσεις σε κάθε BAN και $2 \cdot 7 = 14$ αριθμημένες θέσεις και στα δύο BAN μαζί.

Έχουμε 3 διαφορετικά κορίτσια και 4 διαφορετικά αγόρια, δηλαδή συνολικά $3 + 4 = 7$ διαφορετικά παιδιά.

Βήμα 1: Επιλέγουμε ποιες 7 από τις \$14\$ διαθέσιμες θέσεις θα καταληφθούν. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{14}{7}$ τρόπους.

Βήμα 2: Τοποθετούμε τα 7 διαφορετικά παιδιά στις επιλεγμένες 7 θέσεις. Αυτό μπορεί να γίνει με $7!$ τρόπους. Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων τοποθέτησης των παιδιών είναι

$$N = \binom{14}{7} \cdot 7! = \frac{14!}{7!}.$$

(β) Οι δυνατές τριάδες διαδοχικών πίσω θέσεων σε κάθε BAN είναι:

Η τριάδα $(1, 2, 3)$ και η τριάδα $(2, 3, 4)$.

Άρα σε κάθε BAN έχουμε 2 τριάδες διαδοχικών πίσω θέσεων και για τα δύο BAN μαζί έχουμε συνολικά $2 + 2 = 4$ δυνατές τριάδες διαδοχικών πίσω θέσεων.

Θέλουμε και τα 3 κορίτσια να κάθονται ακριβώς σε μία τέτοια τριάδα πίσω θέσεων.

Βήμα 1: Επιλέγουμε ποια από τις 4 δυνατές τριάδες πίσω θέσεων θα καταληφθεί από τα κορίτσια: 4 τρόποι.

Βήμα 2: Τοποθετούμε τα 3 διαφορετικά κορίτσια στις 3 θέσεις της επιλεγμένης τριάδας: $3!$ τρόποι.

Βήμα 3: Απομένουν $14 - 3 = 11$ κενές θέσεις και 4 αγόρια. Τα 4 διαφορετικά αγόρια μπορούν να καθίσουν σε 4 από τις 11 κενές θέσεις, με σειρά. Ο αριθμός των τρόπων είναι $\binom{11}{4} 4! = \frac{11!}{7!}$.

Το συνολικό πλήθος των περιπτώσεων είναι

$$N = 4 \cdot 3! \cdot P(11, 4) = 4 \cdot 3! \cdot \frac{11!}{7!}.$$

(γ) Οι 14 αριθμημένες θέσεις θεωρούνται ισοπίθανες. Ο συνολικός αριθμός τους είναι

$$N_{\text{συνολ}} = \frac{14!}{7!}.$$

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι σε πλήθος: $N_{\text{ευν}} = 4 \cdot 3! \cdot \frac{11!}{7!}$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P = \frac{N_{\text{ευν}}}{N_{\text{συνολ}}} = \frac{4 \cdot 3! \cdot \frac{11!}{7!}}{\frac{14!}{7!}} = \frac{24 \cdot 11!}{14!}.$$

$$\text{Κάνουμε τις απλοποιήσεις και βρίσκουμε : } P = \frac{24}{14 \cdot 13 \cdot 12} = \frac{24}{2184} = \frac{2}{182} = \frac{1}{91}.$$

Άσκηση 7.17

Σε μια ομάδα 15 ορειβατών, οι 5 γνωρίζουν να προσφέρουν πρώτες βοήθειες. Θέλουμε να σχηματίσουμε τυχαία μια ομάδα με 11 μέλη. Να βρείτε την πιθανότητα η 11-μελής ομάδα να περιέχει τουλάχιστον 3 μέλη με γνώσεις στις πρώτες βοήθειες.

Λύση

Θεωρούμε όλες τις δυνατές 11μελείς ομάδες ως ισοπίθανες.

Συνολικά έχουμε 15 ορειβάτες, από τους οποίους 5 έχουν γνώσεις πρώτων βοηθειών και οι υπόλοιποι 10 δεν έχουν.

Ο συνολικός αριθμός των 11μελών ομάδων που μπορούν να σχηματιστούν από τους 15 ορειβάτες είναι $N_{ολικό} = \binom{15}{11} = \binom{15}{4}$. Υπολογίζουμε:

$$\binom{15}{4} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1365.$$

Άρα ο συνολικός αριθμός δυνατών 11μελών ομάδων είναι 1365.

Θέλουμε τώρα η ομάδα να περιέχει τουλάχιστον 3 μέλη με γνώσεις πρώτων βοηθειών.

Αν X είναι το πλήθος των ορειβατών με γνώσεις πρώτων βοηθειών στην 11μελή ομάδα, ζητάμε την πιθανότητα

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5).$$

Για κάθε τιμή του k υπολογίζουμε πρώτα με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k από τους 5 ειδικούς (ξέρουν πρώτες βοήθειες) και στη συνέχεια με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τα υπόλοιπα $11 - k$ μέλη από τους 10 μη ειδικούς.

Γενικά: $N_k = \binom{5}{k} \binom{10}{11-k}$. Υπολογίζουμε ξεχωριστά:

$$\blacksquare \text{ Για } k = 3: N_3 = \binom{5}{3} \binom{10}{8} = 10 \cdot 45 = 450. \quad \blacksquare \text{ Για } k = 4: N_4 = \binom{5}{4} \binom{10}{7} = 5 \cdot 120 = 600.$$

$$\blacksquare \text{ Για } k = 5: N_5 = \binom{5}{5} \binom{10}{6} = 1 \cdot 210 = 210.$$

Ο συνολικός αριθμός ευνοϊκών 11μελών ομάδων είναι:

$$N_{\text{ευν}} = N_3 + N_4 + N_5 = 450 + 600 + 210 = 1260.$$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P = \frac{N_{\text{ευν}}}{N_{\text{ολικό}}} = \frac{1260}{1365} = \frac{12}{13}.$$

Άρα η πιθανότητα η 11μελής ομάδα να περιέχει τουλάχιστον 3 ορειβάτες με γνώσεις πρώτων βοηθειών είναι $P = \frac{12}{13}$.

Άσκηση 7.18

Ρίχνουμε ένα νόμισμα n φορές.

- (α) Πόσα στοιχεία έχει ο δειγματικός χώρος;
- (β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου να μη φέρουμε σε δύο διαδοχικές ρίψεις το ίδιο αποτέλεσμα.
- (γ) Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε μία τουλάχιστον φορά γράμματα;

Λύση

(α) Σε κάθε ρίψη το νόμισμα δίνει 2 δυνατά αποτελέσματα (κορώνα ή γράμματα). Για κάθε μία από τις n ρίψεις έχουμε 2 επιλογές. Άρα, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, ο δειγματικός χώρος έχει

$$N = 2^n \text{ στοιχεία.}$$

(β) Θέλουμε να μην εμφανιστεί το ίδιο αποτέλεσμα σε δύο διαδοχικές ρίψεις. Αυτό σημαίνει ότι τα αποτελέσματα πρέπει να εναλλάσσονται (π.χ. Κ-Γ-Κ-Γ-, ..., ή Γ-Κ-Γ-Κ-...).

Στην πρώτη ρίψη έχουμε 2 επιλογές, ενώ σε κάθε επόμενη ρίψη υπάρχει μόνο μία δυνατή συνέχεια, αφού πρέπει να έρθει το αντίθετο αποτέλεσμα από την προηγούμενη. Επομένως ο αριθμός των ευνοϊκών ακολουθιών είναι $N_1 = 2 \cdot 1^{n-1} = 2$.

Ο συνολικός αριθμός δυνατών ακολουθιών είναι $N = 2^n$, άρα

$$P_1 = \frac{N_1}{N} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(γ) Το ενδεχόμενο που θέλουμε είναι «να φέρουμε μία τουλάχιστον φορά γράμματα». Χρησιμοποιούμε την αρχή της συμπλήρωσης.

Αν E είναι το ενδεχόμενο «να μην φέρουμε ποτέ γράμματα», τότε σε όλες τις ρίψεις πρέπει να εμφανιστεί κορώνα. Υπάρχει μόνο μία τέτοια ακολουθία, άρα

$$P(E) = \frac{1}{2^n}.$$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P = 1 - P(E) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Άσκηση 7.19

Ο υπάλληλος ενός χώρου στάθμευσης δίνει τυχαία τα 3 κλειδιά αυτοκινήτων στους 3 κατόχους των αυτοκινήτων αυτών. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- (α) Α: Κάθε οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί.
- (β) Β: Μόνο ένας οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί.
- (γ) Γ: Κανένας οδηγός να μην πάρει το δικό του κλειδί.

(δ) Δ: Δύο τουλάχιστον οδηγοί να πάρουν το δικό τους κλειδί.

Λύση

Θεωρούμε ότι όλες οι αντιστοιχίσεις είναι ισοπίθανες. Ο υπάλληλος ουσιαστικά επιλέγει μία μετάθεση των 3 κλειδιών. Άρα ο δειγματικός χώρος έχει $N = 3! = 6$ στοιχεία.

(α) Ενδεχόμενο A: «Όλοι να πάρουν το σωστό κλειδί». Υπάρχει μόνο μία τέτοια μετάθεση (η ταυτότητα), οπότε

$$N_A = 1, \quad P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{1}{6}.$$

(γ) Ενδεχόμενο Γ: «Κανένας να μην πάρει το δικό του κλειδί». Πρόκειται για τις μεταθέσεις χωρίς σταθερά σημεία (αποσυνθέσεις) των 3 στοιχείων. Είναι γνωστό ότι υπάρχουν

$!3 = 2$ (Αναταράξεις) τέτοιες μεταθέσεις, άρα

$$N_\Gamma = 2, \quad P(\Gamma) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(β) Ενδεχόμενο B: «Μόνο ένας οδηγός να πάρει το δικό του κλειδί».

Διαλέγουμε ποιος οδηγός θα πάρει το σωστό κλειδί: 3 τρόποι. Οι άλλοι δύο πρέπει να ανταλλάξουν μεταξύ τους τα κλειδιά, πράγμα που γίνεται με 1 τρόπο. Άρα

$$N_B = 3 \cdot 1 = 3, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(δ) Ενδεχόμενο Δ: «Δύο τουλάχιστον οδηγοί να πάρουν το δικό τους κλειδί».

Για 3 άτομα αυτό σημαίνει ότι είτε 2 είτε 3 οδηγοί έχουν το σωστό κλειδί. Όμως δεν υπάρχει μετάθεση με ακριβώς 2 σταθερά σημεία· αν δύο οδηγοί έχουν το σωστό κλειδί, τότε και ο τρίτος έχει επίσης το σωστό. Άρα το ενδεχόμενο Δ συμπίπτει με το A, οπότε

$$N_\Delta = 1, \quad P(\Delta) = \frac{1}{6}.$$

Άσκηση 7.20

Από μια τάξη, στην οποία φοιτούν 10 κορίτσια και 12 αγόρια, επιλέγονται στην τύχη τρία άτομα για να εκπροσωπήσουν την τάξη.

(α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή;

(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα τα επιλεγμένα άτομα να είναι του ίδιου φύλου.

(γ) Αν ο Άγγελος και η Ανδρομάχη είναι μέλη της τάξης αυτής, να βρείτε την πιθανότητα να βρίσκονται και οι δύο στην επιλεγμένη ομάδα.

Λύση

Συνολικός αριθμός μαθητών: $10 + 12 = 22$.

(α) Επιλέγουμε 3 άτομα από τα 22 χωρίς τάξη. Ο αριθμός των δυνατών τριμελών ομάδων είναι

$$N = \binom{22}{3} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1540.$$

(β) Θέλουμε τα τρία άτομα να είναι του ίδιου φύλου. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

• Και τα τρία είναι κορίτσια: $N_1 = \binom{10}{3}$.

• Και τα τρία είναι αγόρια: $N_2 = \binom{12}{3}$.

Άρα ο συνολικός αριθμός ευνοϊκών τριάδων είναι

$$N_4 = N_1 + N_2 = \binom{10}{3} + \binom{12}{3}.$$

Υπολογίζουμε:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120, \quad \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220.$$

Επομένως

$$N_4 = 120 + 220 = 340.$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P_2 = \frac{N_4}{N} = \frac{340}{1540} = \frac{17}{77}.$$

(γ) Τώρα θεωρούμε δύο συγκεκριμένους μαθητές, τον Άγγελο και την Ανδρομάχη. Θέλουμε και οι δύο να ανήκουν στην τριάδα.

Αν αυτοί οι δύο βρίσκονται σίγουρα στην ομάδα, απομένει να επιλέξουμε ένα ακόμη άτομο από τους υπόλοιπους $22 - 2 = 20$ μαθητές. Άρα

$$N_3 = \binom{20}{1} = 20.$$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P_3 = \frac{N_3}{N} = \frac{20}{1540} = \frac{1}{77}.$$

Άσκηση 7.21

Δύο ορθογώνια κτήματα έχουν χωριστεί σε 9 και 12 οικόπεδα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Επιλέγουμε τυχαία και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο ένα οικόπεδο από κάθε κτήμα.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα και τα δύο οικόπεδα να είναι γωνιακά;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα κανένα από τα οικόπεδα να μην είναι γωνιακό;

(γ) Ποια είναι η πιθανότητα ένα τουλάχιστον από τα οικόπεδα να είναι γωνιακό;

Λύση

(α) Κάθε κτήμα είναι χωρισμένο σε ορθογώνιο πλέγμα οικοπέδων. Σε κάθε τέτοιο πλέγμα τα γωνιακά οικόπεδα είναι πάντα 4.

Για το πρώτο κτήμα (3×3) έχουμε 9 οικόπεδα, από τα οποία τα 4 είναι γωνιακά και τα υπόλοιπα $9 - 4 = 5$ είναι μη γωνιακά:

Για το δεύτερο κτήμα έχουμε $3 \cdot 4 = 12$ οικόπεδα, από τα οποία 4 είναι γωνιακά και τα $12 - 4 = 8$ είναι μη γωνιακά.

Κάθε ζευγάρι οικοπέδων αποτελείται από ένα οικόπεδο του πρώτου και ένα οικόπεδο του δεύτερου κτήματος. Το πλήθος των δυνατών ζευγών οικοπέδων είναι:

$$N = 9 \cdot 12 = 108. \text{ Το πλήθος των δυνατών γωνιακών ζευγών είναι } N_\alpha = 4 \cdot 4 = 16.$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι το πηλίκο ευνοϊκών προς δυνατά ζεύγη:

$$P_\alpha = \frac{N_\alpha}{N} = \frac{16}{108} = \frac{4}{27}.$$

(β) Έχουμε $N_\beta = 5 \cdot 8 = 40$ δυνατότητες να επιλέξουμε ζεύγη από μη γωνιακά οικόπεδα.

Επομένως η πιθανότητα να μην είναι κανένα από τα οικόπεδα γωνιακό είναι:

$$P_\beta = \frac{N_\beta}{N} = \frac{40}{108} = \frac{10}{27}.$$

(γ) Αν πάρουμε το συμπληρωματικό ενδεχόμενο, θα βρούμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P_\gamma = 1 - P_\beta = 1 - \frac{10}{27} = \frac{17}{27}.$$

Με συμπληρωματική απαρίθμηση μπορούμε επίσης να πάρουμε ότι $N_\gamma = N - N_\beta = 108 - 40 = 68$, και επομένως :

$$P_\gamma = \frac{N_\gamma}{N} = \frac{68}{108} = \frac{17}{27}.$$